复变函数与积分变换

薛以锋 李红英 翟发辉 编著

华东理工大学出版社

内 容 提 要

本书根据原国家教委1987年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》而编写。

全书共分为十章，涵盖了解析函数、柯西积分定理、柯西积分公式、级数、留数、分式线性映射、拉普拉斯变换、傅立叶变换等传统工程数学内容，同时也用一定的篇幅分别介绍了圆内调和函数的性质及广义函数的积分变换等既有理论意义又有实际应用价值的内容。

本书可作为高等院校非数学专业的复变函数及积分变换课程的教学用书，也可作为高等理工科院校应用数学专业的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/薛以锋等编著．—上海:华东理工大学出版社，2001.10

ISBN 7-5628-1186-5

Ⅰ．复...　Ⅱ．薛...　Ⅲ．① 复变函数-高等学校-教材 ② 积分变换-高等学校-教材

Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第047334号

复变函数与积分变换

薛以锋　李红英　翟发辉　编著

出版	华东理工大学出版社	开本	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路130号	印张	10.75
邮编	200237　电话(021)64253429	字数	253千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2001年10月第1版
经销	新华书店上海发行所	印次	2001年10月第1次
印刷	上海长阳印刷厂印刷	印数	1-3050册

ISBN 7-5628-1186-5/O·58　　定价:16.00元

前　言

本书根据原国家教委 1987 年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》及 1980 年颁布的高等工业学校《工程数学教学大纲 (草案)》(四年制试用“积分变换”部分) 的要求，在薛以锋等编写的《复变函数与积分变换》讲义的基础上加以扩充和进一步修订而成。全书共分为十章，范围涵盖了解析函数、柯西积分定理、柯西积分公式、级数、留数、分式线性映射、拉普拉斯变换、傅立叶变换等传统的工程数学的内容，同时在书中也用一定的篇幅分别介绍了圆内调和函数的性质及广义函数的积分变换等一些既有理论意义又有实际应用价值的内容，以便选用。本书可以作为高等院校非数学专业的复变函数及积分变换课程的教学用书，也可以作为高等理工科院校应用数学专业的复变函数课程的教学用书。

本书在内容的取舍以及一些定理的证明上兼顾了非数学专业及应用数学专业学生的特点，力求做到简洁和严谨的适度统一。对一些比较难的内容或是超出大纲要求的内容，就以 * 来表示。

本书由薛以锋主编，李红英及翟发辉 (青岛化工学院) 参加了部分章节的编写。具体分工为：薛以锋撰写第一章，第三章的 §3.1~§3.4, 第四章，第八章，第十章的初稿；李红英撰写第二章，第三章的 §3.5, 第九章及附录的初稿；翟发辉撰写第五章，第六章及第七章的初稿。初稿完成之后，再由薛以锋统一进行修改，最后定稿。

本书的编写工作得到了华东理工大学教务处的专项经费的资助，编者在此深表感激。作者借此机会，对理学院领导及数学系同仁对于这本书的立项、编写及排版等工作给予的大力支持和帮助表示感谢，同时编者对于听这门课并指出本书的一些打印错误的李祥等同学表示谢意。编者在此特别要对始终关心本书编写并为编者提出许多真知灼见的王宗尧教授表示深深的谢意。最后，编者还要感谢华东理工大学出版社为出版本书的鼎力相助。

编　者

2001 年 5 月 28 日

目　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数的几何意义和运算 …… 1

§1.2　复数项级数 …… 6

§1.3　区域 …… 8

§1.4　复变函数的极限与连续性 …… 11

习题一 …… 14

第二章　解析函数

§2.1　复变函数的导数与微分 …… 16

§2.2　解析函数的概念与柯西－黎曼方程 …… 20

§2.3　初等解析函数 …… 26

习题二 …… 32

第三章　复变函数的积分

§3.1　复变函数积分概念 …… 34

§3.2　柯西积分定理 …… 38

§3.3　复合闭路定理 …… 44

§3.4　柯西积分公式 …… 46

§3.5　调和函数 …… 50

习题三 …… 56

第四章　无穷级数

§4.1　函数项级数 …… 59

§4.2　幂级数 …… 61

§4.3　解析函数的泰勒展开 …… 63

§4.4　洛朗级数 …… 66

§4.5　解析函数的最大模原理 * …… 70

习题四 …… 73

第五章　积分变换

§5.1　拉普拉斯变换 …… 75

§5.2 傅立叶变换 …… 84
§5.3 广义函数的积分变换 * …… 90
习题五 …… 95

第六章 留数及其应用
§6.1 孤立奇点的分类 …… 97
§6.2 留数定理 …… 100
§6.3 定积分的计算 …… 103
§6.4 拉普拉斯逆变换的计算 * …… 107
§6.5 幅角原理 * …… 109
习题六 …… 112

第七章 共形映射
§7.1 共形映射的概念 …… 114
§7.2 单叶解析函数与共形映射 * …… 118
§7.3 分式线性映射 …… 119
§7.4 几个初等函数所构成的共形映射 …… 127
§7.5 黎曼映射定理简介 * …… 129
习题七 …… 130

第八章 解析函数的三个定理 *
§8.1 解析开拓的方法 …… 132
§8.2 詹生公式 …… 134
§8.3 圆内调和函数的边界值性质 …… 137

第九章 平面复势
§9.1 平面向量场的基本概念 …… 139
§9.2 面静电场与热力学中的复势 …… 143
习题九 …… 147

第十章 积分变换的一些应用
§10.1 拉普拉斯变换的应用 …… 148
§10.2 傅立叶变换在通讯领域中的应用 …… 150
§10.3 积分变换与数理方程 …… 153
习题十 …… 156

附 录 …… 158

参考文献 …… 166

第一章 复数与复变函数

在这一章中，我们首先复习在中学里已经学过的一些有关复数的基本性质，然后定义复变函数并将《高等数学》或《数学分析》中的有关一元或二元函数的极限和连续的概念移植到复变函数中。这样，我们就建立了复变函数分析的框架。

为了叙述的方便，在本书中我们以 $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ 分别表示实数集，整数集和自然数集。

§1.1 复数的几何意义和运算

一、复数的几何意义

设 x, y 是两个实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 表示虚数单位，即 $\mathrm{i}^2=-1$。$x+\mathrm{i}y$ 通常称为复数，记为 $z=x+\mathrm{i}y$。

当 x, y 均为常数时，$z=x+\mathrm{i}y$ 就称为复常数；当 x, y 中至少有一个为变数时，$z=x+\mathrm{i}y$ 称为复变数。在 $z=x+\mathrm{i}y$ 中，x 称为 z 的实部，y 称为 z 的虚部，并分别记为 $x=\mathrm{Re}\,z, y=\mathrm{Im}\,z$。当 $y=0$ 时，$z=x$ 表示实数；当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 为纯虚数；当 $x=y=0$ 时，$z=0$ 可认为是实数或是虚数。

根据复数的定义，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与一对有序实数对 (x,y) 相对应。而一有序的实数对在引入平面直角坐标系后又与平面上的点相对应。由此，我们可将平面上的点 $P(x,y)$ 看作是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的几何表示 (图 1-1)。这样就建立了复数与平面上的点对应关系。我们把实数 x 对应于横坐标轴上的点 x, 把虚数 $\mathrm{i}y$ 对应于纵坐标轴上的点 y。于是横坐标轴称为实轴，纵坐标轴称为虚轴，而 $z=0$ 则对应于坐标原点。我们将引入了实轴、虚轴及原点的平面称为复平面，记为

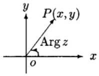


图 1-1

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}。$$

另外，我们还可将 $z=x+\mathrm{i}y$ 理解为复平面内，以原点 O 为起点以 (x,y) 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ (图 1-1)。

因此，我们又可将 z 与 $\overrightarrow{OP}$ 等同起来。向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模，记作 $|z|$ 或 r；$\overrightarrow{OP}$ 与实轴的正向夹角称为 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}\,z$。

$\operatorname{Arg} z$ 是多值的，它们之间可以相差 2π 的整数倍。我们把在 $(-\pi,\pi]$ 中的幅角称为 z 的幅角主值，记为 $\arg z$。当 $z=0$ 时，$\operatorname{Arg} z$ 无意义。对于 $z=x+\mathrm{i}y$, 其中 x,y 中至少有一个不为 0 时，z 的幅角主值 $\arg z$ 可由下式给出：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & (x,y)\text{ 在第一象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & (x,y)\text{ 在第二象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & (x,y)\text{ 在第三象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}, & (x,y)\text{ 在第四象限,}\end{cases}$$

这样，$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$。

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 其中 x,y 中至少有一个不为 0。则 $|z|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}=r\neq 0$, 于是

$$z=x+\mathrm{i}y=|z|(\frac{x}{|z|}+\mathrm{i}\,\frac{y}{|z|})=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)。$$

根据欧拉 (Eular) 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, z 可以用指数函数表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

二、复数的运算

1. 运算的定义

(a) **复数的相等**。设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数。称 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1=z_2$, 是指 $x_1=x_2, y_1=y_2$;

(b) **复数的加法与减法**。设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则 z_1 与 z_2 的加 (减) 法 z_1+z_2 与 (z_1-z_2) 分别定义为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2);$$

复数的加法及减法运算满足平行四边形法则 (如图 1–2 所示);

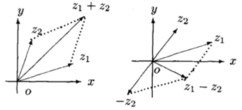


图 1–2

(c) **复数的乘法**。设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 则 z_1 与 z_2 的乘法 z_1z_2 定义为

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)};$$

(d) **复数的除法** 。设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}, z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2} \neq 0$, 则 z_1 与 z_2 的除法 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1 - \theta_2)};$$

(e) **复数取共轭** 。设 $z = x + \mathrm{i}\, y$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 定义为 $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$。

从几何上看， $z, \bar{z}$ 关于实轴对称。

2. 复数运算的一些性质

设 $z_1, z_2, z_3, z \in \mathbf{C}$, 则有下列一些性质：

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, 即复数加法遵循交换律与结合律；

(2) $z_1z_2 = z_2z_1$, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$, 即复数乘法遵循交换律与结合律；

(3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (分配律);

(4) $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (这里， $z_2 \neq 0$);

(5) $|z|^2 = z\bar{z}$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$;

(6) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (这里， $z_2 \neq 0$);

(7) $\mathrm{Arg}\,(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$ (这里， z_1, z_2 都不为 0);

(8) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$;

(9) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$。

3. 复数的乘幂与开方

(1) 乘幂： n 个相同的复数 z 的乘积为 z 的 n 次幂，记为 $z^n = \underbrace{z.z\cdots z}_{n\text{个}}$。当 $z \neq 0$ 时，$z^{-n} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$, 并规定 $z^0 = 1$。这样，当 $z \neq 0$ 时，对任何整数 n 都可定义 z^n;

(2) 开方：设 $z \neq 0$, n 是自然数。我们把满足 $\omega^n = z$ 的解 ω 称为 z 的 n 次根，记为 $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$。下面我们来推导 $z^{\frac{1}{n}}$ 的表达式。

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, $\omega = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}$。则由 $\omega^n = z$, 得到 $\rho^n = r, n\phi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$。所以，$\omega^n = z$ 的解为

$$\omega_k = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\phi + 2k\pi}{n}}。$$

当 $k = 0, \cdots, n-1$ 时, $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ 互不相同；当 k 取其他值时, ω_k 必与 $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ 中的某一个重合，所以

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\phi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, \cdots, n-1。$$

例如， $(1 + \mathrm{i})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\mathrm{i}}$, $k = 0, 1, 2, 3$ 共有四个值

$$\omega_0 = 2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{16}\mathrm{i}}, \qquad \omega_1 = 2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,\omega_0;$$

$$\omega_2 = 2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4}\mathrm{i}} = -\omega_0, \qquad \omega_3 = 2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\,\omega_0。$$

w_0, w_1, w_2, w_3 这四个点在以原点为圆心以 $2^{\frac{1}{8}}$ 为半径的圆周上且将此圆 4 等分。

三、例题

例 1.1 求 (1) $z=-2+3\mathrm{i}$, (2) $(2+\mathrm{i})^3$ 的实部，虚部，模及幅角。

解: (1) $\mathrm{Re}\,z=-2$, $\mathrm{Im}\,z=3$, $|z|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$; $\arg z=\pi-\arctan\dfrac{3}{2}$。所以，$\mathrm{Arg}\,z=-\arctan\dfrac{3}{2}+(2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\cdots$。

(2) $(2+\mathrm{i})^3=2^3+3\cdot2^2\cdot\mathrm{i}+3\cdot2\cdot\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=2+11\mathrm{i}$, 所以 $(2+\mathrm{i})^3$ 的实部为 2, 虚部为 11, 模为 $5\sqrt{5}$, 幅角为 $2k\pi+\arctan\dfrac{11}{2}$。

例 1.2 设 z_1,z_2 是两个复数，证明: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$。

证明: 一般关于复数模的等式或不等式的证明往往采用公式 $|z|^2=z\bar{z}$, 将复数的长度关系转化为复数的代数运算关系。

由于

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2,$$

所以

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2=&|z_1|^2+2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\ \le&|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

从而 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$。 □

例 1.3 将在直角坐标系下的直线方程 $ax+by+c=0$ 化为在 $\mathbf{C}$ 内的复变量表示式。

解: 由于 $z=x+\mathrm{i}y$, 所以

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})。$$

将此式代入 $ax+by+c=0$ 得:

$$a(z+\bar{z})-\mathrm{i}\,b(z-\bar{z})+2c=0。$$

令 $A=a-\mathrm{i}\,b$, $B=-2c$。则上式化为

$$\bar{A}\,z+A\,\bar{z}=B。$$

这就是直线 $ax+by+c=0$ 在 $\mathbf{C}$ 中的表示式。

四、复数的复球面表示

复数除了可用平面内的点或向量表示外，还可以用球面上的点来表示。下面，我们来描述这种表示方式。

取一个与复平面 $\mathbf{C}$ 切于原点 $z=0$ 的单位球面，球面上的一点 S 与原点重合 (图 1–3) 。通过 S 作垂直于 $\mathbf{C}$ 的直线与球面相交于另一点 N。N 、 S 分别称为球面的北极与南极。

设 $P'(x,y)$ 为 $\mathbf{C}$ 内任何一点，则过 N 点与 P' 点的连线交球面于一点 $P(\xi,\eta,\zeta)$。我们以 N 为射影中心，则除了点 N 外，球面上所有点与平面上的所有点是一一对应的。令 N 对应平面上的无穷远点 ∞ 于是， $\mathbf{C}^+=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$（扩充复平面）上的所有点和球面上的所有点成了一一对应。因此，全部复数可用这个球面上的点来表示。这样规定的球面叫做黎曼 (Riemann) 球面，而这样的对应关系叫做球极平面射影。

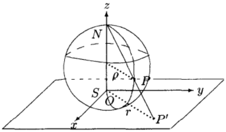


图 1–3

我们现在来求这个变换的方程。设 $P=(\xi,\eta,\zeta)$, $P'=(x,y)$。根据图 1–3, 有

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1$$
$$\frac{\rho}{r}=\frac{2-\zeta}{2},\ \frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{r}{\rho}=\frac{2}{2-\zeta}$$

故得

$$x=\frac{2\xi}{2-\zeta},\ y=\frac{2\eta}{2-\zeta},\ z=\frac{2(\xi+\mathrm{i}\,\eta)}{2-\zeta}。$$

因为

$$\bar{z}z=\frac{4(\xi^2+\eta^2)}{(2-\zeta)^2}=\frac{4\zeta}{2-\zeta},\ \bar{z}z+4=\frac{8}{2-\zeta},$$

故又得

$$\xi=\frac{2(z+\bar{z})}{\bar{z}z+4},\ \eta=\frac{2\,\mathrm{i}\,(\bar{z}-z)}{\bar{z}z+4},\ \zeta=\frac{2\bar{z}z}{\bar{z}z+4}。$$

复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来，这就是它比复平面有优越性。由于复数在球面上的表示引出了扩充复平面 $\mathbf{C}^+$ 这个概念，我们有必要定义 $\mathbf{C}^+$ 中一些运算。首先，对于复数 ∞ 来说，实部、虚部与幅角的概念均无意义，但它的模则规定为 $+\infty$ (即 $|\infty|=+\infty$), 对于其它的 $z\in\mathbf{C}$, 则 $|z|<+\infty$。∞ 的四则运算的规定如下：

(1) 加法： $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty,\ (\alpha\neq\infty)$;

(2) 减法： $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty,\ (\alpha\neq\infty)$;

(3) 乘法： $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty\ (\alpha\neq 0)$;

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\ \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty\ (\alpha\neq 0)$, $\dfrac{\alpha}{0}=\infty\ (\alpha\neq 0$ 但可为 $\infty)$ 。

至于其他的运算如： $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ 等，则无法定义。

§1.2 复数项级数

我们已经知道，对于实数列 $\{a_n\}_1^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 用定义来表示的话就是：对 $\forall\epsilon>0$, 存在自然数 N, 使得对任何 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\epsilon$。这个概念可以推广到复数范围，具体如下：

定义 1.1 设 $\{c_n\}_1^\infty$ 是复数列， c 是一个复数。若对 $\forall\epsilon>0$, 存在自然数 N, 使得对任何 $n>N$, 有 $|c_n-c|<\epsilon$, 则称 $\{c_n\}_1^\infty$ 收敛于 c 并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$。

对于复数列 $\{c_n\}_1^\infty$, 若对任何复数 c, 存在 $\epsilon_0>0$ 使得对任何自然数 N, 总存在 $n_0>N$ 满足不等式 $|c_{n_0}-c|\geq\epsilon_0$, 这时我们就称 $\{c_n\}_1^\infty$ 是发散的。

比如，复数列 $\left\{\dfrac{1+\mathrm{i}\,(-1)^n}{n}\right\}_1^\infty$ 收敛于 0, 而 $\{1+\mathrm{i}\,(-1)^n\}_1^\infty$ 却是发散的。

根据复数列收敛性的定义，易知

命题 1.1 设 $\{c_n\}_1^\infty$ 是复数列， $c\in\mathbf{C}$。则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}c_n=\operatorname{Re}c \ \text{ 及 }\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}c_n=\operatorname{Im}c。$$

设 $\{c_n\}_1^\infty$ 是复数列，

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$$

称为无穷级数。令 $s_n=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的前 n 项之和。若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛于 s, 而且 s 称为该级数的和，记作 $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$。若序列 $\{s_n\}_1^\infty$ 不收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散。

由命题 1.1 可得：

命题 1.2 设 $\{c_n\}_1^\infty$ 是复数列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}c_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}c_n$ 都收敛，而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}c_n+\mathrm{i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}c_n$。

于是利用命题 1.2 可以得到复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的一些性质如下：

命题 1.3

(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个收敛的复数项级数，则对复常数 λ,μ, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ 收敛且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$;

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 是收敛的复数项级数，则 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$;

(3) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为复数项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, c_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\, c_n|$ 都收敛。

证明： 我们仅对 (3) 进行证明。设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛。由于 $|\mathrm{Re}\, c_n| \le |c_n|$, $|\mathrm{Im}\, c_n| \le |c_n|$, 故由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, c_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\, c_n|$ 都收敛。

反之，设 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, c_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\, c_n|$ 收敛。由于

$$|c_n| = |\mathrm{Re}\, c_n + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, c_n| \le |\mathrm{Re}\, c_n| + |\mathrm{Im}\, c_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛。 □

对于复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛，我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛。由命题 1.2 及命题 1.3 立刻可得：若 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 必收敛。

现设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个绝对收敛的复数项级数。令

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j}。$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n} |c_n| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_{n+1-j}| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|\right)$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 都收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛。$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 称为 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 与 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ 的乘积，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)。$$

例 1.4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{\frac{n}{2}} n}$ 的敛散性。

解： 由于 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, 所以原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{\frac{n}{2}} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{4}。$$

注意到：

$$\cos\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} (-1)^k & n = 4k \\ (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 4k+3 \end{cases}, \qquad \sin\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 4k+1 \\ (-1)^k & n = 4k+2 \\ (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 4k+3 \end{cases},$$

我们可以对上述的每一种情况分别用交错级数的收敛判断法则进行判断，最后可得原级数收敛。

§1.3 区　　域

在定义复平面 $\mathbf{C}$ 内的区域之前，我们首先回顾一下平面中点集的一些基本概念。

一、开集、闭集

设 $z_0 \in \mathbf{C}, \delta > 0$。称 $\mathbf{C}$ 中的集合 $U(z_0,\delta) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 的 δ 邻域，而以 $U(\hat{z}_0,\delta) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 表示为 z_0 的 δ 去心邻域。一般而言，如果不需要特别强调 δ 时，就以 $U(z_0)$ 及 $U(\hat{z}_0)$ 分别表示 $U(z_0,\delta)$ 及 $U(\hat{z}_0,\delta)$。

有了邻域这个基本概念之后，我们就可以来定义开集和闭集。

定义 1.2 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 中的非空子集。$z_0 \in E$ 称为是 E 的内点，若存在 z_0 的一个 δ 邻域 $U(z_0,\delta)$ 使得 $U(z_0,\delta) \subset E$。记 E° 为 E 中内点的全体。如果 $E^\circ = E$, 则称 E 为 $\mathbf{C}$ 中的开集。

$\mathbf{C}$ 的非空子集 F 称为是闭的，若 $\mathbf{C}\backslash F$ 为 $\mathbf{C}$ 中的开集。

定义 1.3 设 E 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的非空子集， $z_0 \in \mathbf{C}$。若 z_0 的任何邻域 $U(z_0)$ 总含有属于 E 中的点及不属于 E 中的点，则 z_0 称为 E 的边界点。我们以 ∂E 表示 E 的边界点的全体，并称之为 E 的边界。

例如，由定义 1.2,

$$D_1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\},\ D_2 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| > 1\}$$

都是 $\mathbf{C}$ 中的开集，

$$\bar{D}_1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| \le 1\},\ \bar{D}_2 = \mathbf{C}\backslash D_1$$

则为 $\mathbf{C}$ 中的闭集。由定义 1.3 可知

$$\bar{D}_1 = \partial D_2 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$$

而且 $\bar{D}_1 = D_1 \cup \partial D_1, \bar{D}_2 = D_2 \cup \partial D_2$ (见图 1-4) 。 一般地，我们可以定义下面的概念。

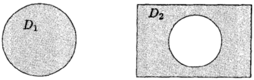


图 1-4

定义 1.4 设 E 复平面 $\mathbf{C}$ 中的非空子集。集合 $\bar{E}=E^{\circ}\cup\partial E$ 称为 E 的闭包。

根据开集、闭集的定义，易知

命题 1.4 复平面 $\mathbf{C}$ 中任何有限个开集的交与并都是开集；任何有限个闭集的交与并都是闭集。

但下面关于闭集的结论却不是容易证明的。

命题 1.5 设 E 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的非空子集。

(1) $\bar{E}$ 是闭的；

(2) $x\in\bar{E}$ 当且仅当存在 $\{x_n\}_1^{\infty}\subset E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$；

(3) E 是闭的当且仅当 $\bar{E}=E$。

证明： (1) 根据闭集的定义，我们需要证明 $\mathbf{C}\backslash\bar{E}$ 是开集。设 $z\in\mathbf{C}\backslash\bar{E}$，即 $z\notin E^{\circ}$ 及 $z\notin\partial E$。由边界点的定义，$z\notin\partial E$ 意味着存在 $\delta>0$ 使得 $U(z,\delta)$ 中不含 E 中的点或 $\mathbf{C}\backslash E$ 中的点，即 $U(z,\delta)\cap E=\phi$ 或 $U(z,\delta)\cap(\mathbf{C}\backslash E)=\phi$。

现设 $U(z,\delta)\cap(\mathbf{C}\backslash E)=\phi$，即 $U(z,\delta)\subset E$。则 $z\in E^{\circ}$，这与 $z\notin E^{\circ}$ 矛盾。所以，假设 $U(z,\delta)\cap(\mathbf{C}\backslash E)=\phi$ 是不存在的。

设 $U(z,\delta)\cap E=\phi$，我们要推出 $U(z,\delta)\cap\partial E=\phi$。不然，若存在 $z_0\in U(z_0,\delta)\cap\partial E$，则由 ∂E 的定义，对于使得 $U(z_0,\delta_0)\subset U(z,\delta)$ 的 δ_0，$U(z_0,\delta_0)$ 中含有 E 中的点，这与 $U(z,\delta)\cap E=\phi$ 矛盾。所以，$U(z,\delta)\cap\partial E=\phi$。由此，我们得到 $U(z,\delta)\cap\bar{E}=\phi$，即 $U(z,\delta)\subset\mathbf{C}\backslash\bar{E}$，即 z 为 $\mathbf{C}\backslash\bar{E}$ 的内点。

(2) 设 $x\in\bar{E}$。若 $x\in E^{\circ}$，取 $x_n=x,\ n=1,2,\cdots$ 即可；若 $x\in\partial E$，则由边界点的定义，对任意 $n\geq 1$ 存在 $x_n\in U(x,\frac{1}{n})\cap E$。于是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。反之，若 $x\notin\bar{E}$，则由 (1)，存在 $\delta>0$ 使得 $U(x,\delta)\subset\mathbf{C}\backslash\bar{E}$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，故当 n 充分大时，$x_n\in U(x,\delta)$，这就与 $\{x_n\}_1^{\infty}\subset E$ 矛盾。

(3) 由于 $\bar{E}$ 是闭的，所以当 $E=\bar{E}$ 时，E 自然就是闭的；反之，设 E 是闭的。由于 $E\subset\bar{E}$，若存在 $z_0\in\bar{E}$ 且 $z_0\notin E$，即 $z_0\in\mathbf{C}\backslash E$。因为 $\mathbf{C}\backslash E$ 是开集，所以存在 $r>0$ 使得 $U(z_0,r)\subset\mathbf{C}\backslash E$，即 $U(z_0,r)\cap E=\phi$。于是，由上述的证明过程可知，$U(z_0,r)\cap\partial E=\phi$。从而 $z_0\notin\partial E$。又 $z_0\notin E$，故 $z_0\notin\bar{E}$，这与 $z_0\in\bar{E}$ 矛盾。这样，我们就有 $\bar{E}=E$。 □

二、区域

定义 1.5 设 D 是 $\mathbf{C}$ 中的非空集合。称 D 是连通的，若 D 的任何两个点都可用属于 D 的折线连接起来；称 D 是一个区域，若 D 是连通的且又是开集。若 D 是区域而 $\bar{D}$ 连通，则称 $\bar{D}$ 是 $\mathbf{C}$ 中的闭区域。

例如圆盘 $D_r=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|<r\}$ 是区域，$\mathbf{C}$ 也是区域，$\bar{D}_r$ 是闭区域。注意到，D_r 能被一个大的圆盘所覆盖住，而 $\mathbf{C}$ 则不能被任何有限大的圆盘所覆盖。前者称为有界区域，而后者则称为无界区域。

把上述概念一般化，我们就有

定义 1.6 $\mathbf{C}$ 中一个子集 G 称为是有界的，若存在 $M > 0$ 使得对任意 $z \in G, |z| \le M$; 不是有界的集合称为无界集。

由定义 1.6 及命题 1.5 可以看出，若 $G \subset \mathbf{C}$ 是有界的，则 $\bar{G}$ 也有界。例如，区域

$$G = \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

是有界区域并且

$$\partial G = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r_1\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r_1\}$$
$$\bar{G} = \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 \le |z - z_0| \le r_2\}。$$

三、平面曲线

圆盘的边界是一个圆周，圆环域的边界则是两个半径不同的圆周的并。一般来说，复平面内的区域一般是由一些曲线及（或）一些孤立点构成。

我们知道，在平面直角坐标系下，由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

可确定一条平面曲线 C, 这里 $x(t), y(t)$ 关于 t 连续。在复平面中，曲线 C 可表示为 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t), a \le t \le b$。若在 $[a,b]$ 上， $x'(t), y'(t)$ 都是连续的且对任何 $t \in [a,b]$, 有

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$$

则称 C 为光滑曲线。由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线。

设 $C: z = z(t), t \in [a,b]$ 为一条曲线。 $\alpha = z(a), \beta = z(b)$ 分别称为 C 的起点和终点。若对 $t_1 \in [a,b], t_2 \in (a,b)$ 且 $t_1 \neq t_2$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$, 则称 C 为简单曲线；若 $z(a) = z(b)$, 则称 C 为闭曲线；若 C 既是简单曲线又是闭曲线，则称 C 是简单闭曲线。

在图 1–5 中， (a) 是简单闭曲线， (b) 是简单不闭曲线， (c) 不是简单的闭曲线曲线， (d) 既不是简单曲线又不是闭曲线。 对于简单闭曲线，我们有下面的定理：

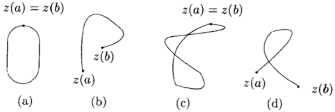


图 1–5

定理 1.1 (约当 (Jordan) 定理) 任意一条简单闭曲线把复平面分为两个不相连的区域：一个是此曲线的内部为有界区域，另一个是此曲线的外部为无界区域，它们都以此曲线为边界。

区域 $D_{r_1}=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z-z_0|<r_1\}$ 与区域 $D_{r_1,r_2}=\{z\in\mathbf{C}\,|\,r_2<|z-z_0|<r_1\}$ 是不同的，前者的内部没有洞，而后者的内部有一个洞； D_{r_1} 中的任何一条简单闭曲线的内部在 D_{r_1} 中，而 D_{r_1,r_2} 中却有内部不属于 D_{r_1,r_2} 的简单闭曲线。鉴于此，我们用下面的定义来区分这两种不同类型的区域。

定义 1.7 设 G 是复平面内的区域 (或闭区域)。称 G 是单连通的，若 G 内任意一条简单闭曲线的内部都包含在 G 内。不是单连通的区域 (或闭区域) 称为多连通区域 (或闭区域)。

用通俗的语言来说，所谓的单连通区域就是没有洞的区域，而多连通区域则是有洞的区域 (如图 1–6 所示) 。



图 1–6

§1.4 复变函数的极限与连续性

定义 1.8 设 E 是 $\mathbf{C}$ 中的一个非空集合。若对于 E 内的每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 按一定的规则，有一个或几个确定的复数 $\omega=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称在 E 上确定了一个复变函数，记为

$$\omega=f(z)=u+\mathrm{i}v,\ z\in E。$$

E 称为函数 $f(z)$ 的定义域， f 称为对应法则。若对 E 内的每一点 z, 只有唯一的一点 ω 使得 $\omega=f(z)$, 则称 $f(z)$ 为单值函数；若对 E 内的每一点 z, 至少有多于一个的 ω 使得 $\omega=f(z)$, 则称 $f(z)$ 为多值函数。

例 1.5 $f(z)=z^2$, $f(z)=\overline{z}$, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $z\neq-\dfrac{d}{c}$, 都是单值函数。

例 1.6 $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$, $z\neq0$, $f(z)=\mathrm{Arg}\,z$, $z\neq0$ 为多值函数。

今后若无特别声明，我们总是假设复变函数是单值的。

设 D 是 $\mathbf{C}$ 中的一个区域， $\omega=f(z)=u+\mathrm{i}v$。则对 $z=x+\mathrm{i}y\in D$, $\omega=f(z)$ 是由

两个二元实函数

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D$$

所确定。

例 1.7 设 $\omega = z^2$, $z = x + \mathrm{i}\, y$, $\omega = u + \mathrm{i}\, v$。则

$$u + \mathrm{i}\, v = \omega = z^2 = (x + \mathrm{i}\, y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}\, xy$$

即 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$。现设

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\}$$

而 $z = x + \mathrm{i}\, y$ 在 D 上变化。我们来求点 (u,v) 的变化范围。

由 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, 得 $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$, 从而

$$x^2 = \frac{1}{2}\left[(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} + u\right],\ y^2 = \frac{1}{2}\left[(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} - u\right].$$

又 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$, 故得到

$$13(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} + 5u \le 72。$$

再化简，则可得

$$\frac{\left(u + \frac{5}{2}\right)^2}{119/2} + \frac{v^2}{4284/169} \le 1$$

即 (u,v) 也在一个椭圆盘上变化。

这个例子说明，函数 $\omega = z^2$ 将椭圆盘映成一个椭圆盘。一般地，对于给定的 $\mathbf{C}$ 中的区域 G 及在 G 上定义的复变函数 $\omega = f(z)$, 我们对 G 在 $f(z)$ 下的像的集合 $\mathcal{R} = \{f(z) |\, z \in G\}$ 是非常感兴趣的。我们希望能够求出 $\mathcal{R}$ 的形状并能借助 G 及 $f(z)$ 的性质来揭示 $\mathcal{R}$ 的性质。另一方面，对于 $\mathbf{C}$ 中给定的两个区域 G_1 及 G_2, 我们也希望能够找到一个复变函数 $f(z)$ 使得 $f(G_1) = G_2$。这两方面的内容属于复变函数的共形映射的研究范围，我们将在第七章中讨论这些问题。

下面我们将仿照一元函数，二元函数的极限及连续性讨论来讨论一下复变函数的极限及连续性。

定义 1.9 设 $z_0, A \in \mathbf{C}$, $\omega = f(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域内有定义。若对任何 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对 $\forall z \in U(\hat{z}_0, \delta)$ 有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则 A 称为 $f(z)$ 在 z 趋于 z_0 时的极限并记为 $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 或 $f(z) \to A\ (z \to z_0)$。

由于复变函数极限的定义与《高等数学》或《数学分析》中的一元函数的极限定义相似，我们可以仿照证明下面的性质：

命题 1.6 设 $f(z), g(z)$ 在某个去心邻域 $U(\hat{z}_0, \delta_0)$ 内有定义且

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A,\ \lim_{z \to z_0} g(z) = B, \text{ 则}$$

(1) 存在 z_0 的某个去心邻域 $U(\hat{z}_0,\delta_1)\subset U(\hat{z}_0,\delta_0)$ 及 $M>0$, 使得 $|f(z)|\le M$ 对任何 $z\in U(\hat{z}_0,\delta_1)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=A\pm B$, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$, 及 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\ne 0)$。

由于复变函数可以表示成两个二元函数的形式，所以我们又有下面的性质:

命题 1.7 设 $\omega=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$ 的一个去心邻域内有定义, $A=A_1+\mathrm{i}\,A_2$, $z=x+\mathrm{i}\,y$。则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=A_1,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=A_2。$$

证明：先证必要性。由极限定义，对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, 有 $|f(z)-A|<\epsilon$。由于

$$|u(x,y)-A_1|\le|f(z)-A|,\quad |v(x,y)-A_2|\le|f(z)-A|$$

故由二元函数在 (x_0,y_0) 处的极限定义得到

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=A_1,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=A_2。$$

现在证明充分性。由于对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|^2+|y-y_0|^2<\delta^2$ 时

$$|u(x,y)-A_1|<\frac{\epsilon}{2},\quad |v(x,y)-A_2|<\frac{\epsilon}{2}。$$

则当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(z)-A|=&|(u(x,y)-A_1)+\mathrm{i}\,(v(x,y)-A_2)|\\ \le&|u(x,y)-A_1|+|v(x,y)-A_2|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon。\end{aligned}$$

□

同一元函数的非正常极限的定义相类似，我们可以定义 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$ 及 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$ 如下:

定义 1.10 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$ 定义为: 对任何 $G>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)|>G$;

$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$ 定义为: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$ 使得当 $|z|>X$ 时, $|f(z)-A|<\epsilon$;

$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$ 定义为: 对任何 $G>0$ 存在 $X>0$ 使得当 $|z|>X$ 时, $|f(z)|>G$。

比如，根据上述定义，我们有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z-z_0}=0,\quad \lim_{z\to\infty}(z-z_0)=\infty。$$

仿照一元函数及二元函数的连续性的定义，我们还可以定义复变函数的连续性概念如下:

定义 1.11 设 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义。若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

设 $f(z)$ 在区域 D 内有定义。若 $f(z)$ 在 D 内每点都连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

根据这个定义及上述的命题 1.7, 容易得到

命题 1.8 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续； $f(z)$ 在区域 D 内连续的充要条件是 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 D 内连续。

由命题 1.7 及命题 1.8 并利用闭区域上二元连续函数的性质可得

命题 1.9

(1) 在 z_0 处（或区域 D 内）连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（分母在 z_0 处不为零或 D 中使 $g(z)$ 不为零的点）在 z_0 处（或在其定义域内）连续；

(2) 设函数 $h=g(z)$ 在 z_0 处（或区域 D 内）连续，函数 $\omega=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 处连续（在区域 G 内连续且 $G\supset g(D)$）。则 $\omega=f(g(z))$ 在 z_0 处（或 D 内）连续；

(3) 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则存在 $M>0$ 使得 $|f(z)|\le M$, $\forall z\in\overline{D}$。

由命题 1.9, 我们可以推出多项式

$$P_n(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

在全平面 $\mathbf{C}$ 内连续而有理函数

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+\cdots+b_{m-1}z+b_m}$$

在区域 $D=\{z\in\mathbf{C}\,|\,Q_m(z)\neq 0\}$ 内连续。

最后，我们还须提一下在复变函数中常用的所谓在曲线上连续的概念。

定义 1.12 设 $f(z)$ 在曲线 C 上有定义，$z_0\in C$。$f(z)$ 在 z_0 关于 C 连续是指 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$, $z\in C$。若 $f(z)$ 在 C 上每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 C 上连续。

现设 $f(z)$ 在曲线 C: $z=z(t)$, $a\le t\le b$ 上连续。则 $\omega(t)=f(z(t))$ 在 $[a,b]$ 上连续。于是，由闭区间上连续函数的性质可知，存在 $L>0$ 使得对任何 $z\in C$ 有 $|f(z)|\le L$。

习 题 一

1. 求下列复数的实部、虚部、幅角与模：

   (1) $\dfrac{1}{z}$;　　(2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;

   (3) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5-1}{(1+\mathrm{i})^5+1}$;　　(4) $\dfrac{(2+\mathrm{i})^9}{(3-2\mathrm{i})^7}$。

2. 求 $(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{6}}$ 及 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{2}{3}}$。

3. 设 a, b 是实数且 $b>0$。如果有实数 x, y 满足方程

$$x+\mathrm{i}y=\sqrt{a+\mathrm{i}b},$$

   试求 x, y 的值。

4. 设 z_1, z_2 是两个复数，试证明：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

   并说明此等式的几何意义。

5. 试证明：平面上三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件是：存在不全为零的实数 a, b, c 使得

$$a+b+c=0, \quad az_1+bz_2+cz_3=0。$$

6. 设复数 z_1, z_2, z_3 满足条件

$$z_1+z_2+z_3=0, \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=1。$$

证明：z_1, z_2, z_3 是等边三角形的三个顶点。

7. 设 z_1, z_2 是单位圆内的任意两点，证明：$|z_1-z_2|<|1-z_1\bar{z}_2|$。

8. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在复平面中的表达式。

9. 下列数列 $\{a_n\}_1^\infty$ 是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

(1) $a_n=\dfrac{3-2n\,\mathrm{i}}{2+n\,\mathrm{i}}$;　(2) $a_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{3}\right)^{-n}$;

(3) $a_n=\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}$;　(4) $a_n=\dfrac{n}{\mathrm{e}^{n+\mathrm{i}}}\dfrac{2^n}{n!}$。

10. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$;　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5\,\mathrm{i})^n}{8^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{i}}}{\ln n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-\mathrm{i}\,n)[1-(n+1)\,\mathrm{i}]}$。

11. 试求满足下列各关系式的点的轨迹：

(1) $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$;　(2) $\mathrm{Re}\,z^2\leq 2$;

(3) $|z^2-1|<2$;　(4) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\geq 2$。

12. 设 $\omega=f(z)=\dfrac{1}{z}$。分别求下列图形

(1) 带形区域 $0<\mathrm{Im}\,z<2$, (2) 角形区域 $x>1$, $y>1$ 在 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 的映射下的像。

13. 设 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\neq 0$。证明：存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0,\delta)$ 使得 $f(z)\neq 0$, $\forall\, z\in U(z_0,\delta)$。

14. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^4+z^3+4z}{z^4+z+1}$;　(2) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\bar{z}+z_0}{1+z_0 z}$。

15. 设

$$S_1=\{(z_1z_2, z_1+z_2)\,|\,|z_1|=|z_2|=1\}$$
$$S_2=\{(z^2, 2\,t\,z)\,|\,|z|=1,\ t\in[0,1]\}。$$

证明：

(1) 若 z_1, z_2, z_1', z_2' 是单位圆周上的复数而且 $z_1z_2=z_1'z_2'$, $z_1+z_2=z_1'+z_2'$, 则 z_1 等于 z_1' 或 z_2';

(2) $S_1=S_2$。

第二章　解 析 函 数

解析函数是复变函数研究的主要对象，它在理论和实际问题中有着广泛的应用。本章在介绍复变函数导数与微分的基础上，着重研究解析函数的概念及判别方法，最后介绍一些常用的初等函数及其基本性质。

§2.1　复变函数的导数与微分

在《数学分析》或《高等数学》中，微分学主要是研究实变量函数的导数与微分，若将其定义推广至复变函数中来，就可得到复变函数导数与微分的定义，并且微分学中几乎所有的基本定理与公式都可移植到复变函数中。不过，复变函数的可微函数比实变函数的可微函数具有更多独特的性质。

一、导数定义

定义 2.1 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内有定义，给自变量 $z \in D$ 一个增量 Δz，使 $z + \Delta z \in D$。如果极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.1}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z 点可导或可微，此极限值称为 $f(z)$ 在 z 的导数，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$，即

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}。$$

值得注意的是：极限 (2.1) 的存在应当与 Δz 趋于 0 的方式无关，这一限制比实变函数导数的类似限制要严格得多，从而使得复变可导函数具有许多独特的性质与应用。

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内任一点处均可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导。

根据定义 2.1, 我们可以讨论一些简单复变函数的可导性。

例 2.1 例如，根据导数的定义，常数函数 $f(z) = C$ 的导数为零。

例 2.2 求函数 $f(z) = z^n$ (n 为正整数) 的导数。

解: 由于

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(n\,z^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right)\\ &= n\,z^{n-1},\end{aligned}$$

所以， $f'(z)=n\,z^{n-1}$。

例 2.3 考虑函数 $f(z)=|z|^2$ 的可导性。

解: 当 $z=0$ 时， $f(z)=0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}。$$

设 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$, 则 $\overline{\Delta z}=\Delta x-\mathrm{i}\,\Delta y$, 由于 $\Delta z\to 0$, 则有 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, 从而有 $\overline{\Delta z}\to 0$。故而有 $f'(0)=0$。

当 $z\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\bar z+\overline{\Delta z})-z\bar z}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\cdot\overline{\Delta z}+\Delta z\cdot\bar z+\Delta z\cdot\overline{\Delta z}}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)。\end{aligned}$$

若 Δz 沿着平行于 x 轴的方向趋近于 0, 则 $\Delta y=0$, $\Delta z=\Delta x$, 从而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x}=1,$$

此时极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)=\bar z+z$。

若 Δz 沿着平行于 y 轴的方向趋近于 0, 则有 $\Delta x=0$, $\Delta z=\mathrm{i}\,\Delta y$, 从而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\mathrm{i}\,\Delta y}{\mathrm{i}\,\Delta y}=-1,$$

此时极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)=\bar z-z$。所以， $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处不可导。

在例 2.3 中，若 z 为实数，则 $f(z)=|z|^2=x^2$ 处处可导。就导数存在性而言，当 z 为实数或复数时，二者差别很大。

二、可导与连续

设函数 $w=f(z)$ 在 z 处可导，即 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在。考虑极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[f(z+\Delta z)-f(z)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\Delta z=f'(z)\cdot 0=0,$$

这说明 $f(z)$ 在点 z 处连续。于是可知，可微函数必是连续函数。

另一方面，函数 $f(z)$ 在某点连续却不一定在该点可导。如例 2.3, $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$, 显然 $f(z)$ 在复平面内处处连续，但除 $z=0$ 点外， $f(z)$ 却处处不可导。另外，在复变函数中处处连续却处处不可导的函数几乎随处可见。

例 2.4 证明 $f(z)=x+3y\,\mathrm{i}$ 在复平面上处处不可导。

证明： 考虑

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+3(y+\Delta y)\,\mathrm{i}-x-3y\,\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\,\mathrm{i}}$$

假设 Δz 沿任何射线 $\Delta y=k\Delta x$ 趋近于 0 (k 为任意实数), 则极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+3\Delta y\,\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\,\mathrm{i}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+3k\Delta x\,\mathrm{i}}{\Delta x+k\Delta x\,\mathrm{i}}=\frac{1+3k\,\mathrm{i}}{1+k\,\mathrm{i}}。$$

显然极限值与 k 的取值有关，因此 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 不存在，即 $f'(z)$ 不存在。 □

三、求导法则

由于复变函数的导数定义与《高等数学》或《数学分析》中的导数定义在形式上完全一样，并且其相应的极限运算法则也完全相同，所以实变量函数中的有关求导公式及法则均可相应地推广到复变函数中，其证明也完全类似。

命题 2.1 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内可导，则有

(1) $\big[f(z)\pm g(z)\big]'=f'(z)\pm g'(z)$;

(2) $\big[f(z)\cdot g(z)\big]=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$,

特别有 $[\alpha\cdot f(z)]'=\alpha\cdot f'(z)$ (α 为一常数);

(3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $(g(z)\neq 0)$;

(4) (复合函数的求导法则)

$$\Big[f\big(g(z)\big)\Big]'=f'(w)\cdot g'(z),\quad 其中\ w=g(z);$$

(5) (反函数的求导法则) $f'(z)=\dfrac{1}{g'(w)}$, 其中 $w=f(z)$ 与 $z=g(w)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $g'(w)\neq 0$。

例 2.5 讨论多项式 $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ 的可导性。

解: 根据例 2.2, $(z^n)'=nz^{n-1}$, 以及求导法则可知 $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ 在整个复平面上可导，并且

$$f'(z)=na_nz^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1。$$

类似于《高等数学》或《数学分析》中实变量函数的高阶导数，我们可以定义复变函数的高阶导数。

对于可微函数 $w=f(z)$, 其导数 $f'(z)$ 一般仍是 z 的函数。如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z+\Delta z)-f'(z)}{\Delta z}$$

存在，称此极限为函数 $f(z)$ 的二阶导数，记为:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2},\quad w''(z)\quad 或\quad f''(z)。$$

$w=f(z)$ 的二阶导数仍可作为 z 的函数，因此仍可考虑 $f''(z)$ 是否具有导数，称 $f''(z)$ 的导数为 $f(z)$ 的三阶导数，记为

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}z^3},\quad w'''(z),\quad f'''(z)\quad 或\quad f^{(3)}(z)。$$

一般地， $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(z)$ 的导数，称为 $f(z)$ 的 n 阶导数，记为

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}\qquad 或\qquad f^{(n)}(z)。$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。

由于高阶导数的定义是按照导数来定义的，因此求高阶导数并没有新的计算法则。

四、微分

考察在区域 D 内的可导函数 $f(z)$。对 $z\in D$, $f(z)$ 在 z 可导，即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

或写成

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right]=0。$$

令

$$\rho(\Delta z)=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z),$$

则有 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$, 于是

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\rho(\Delta z)\cdot\Delta z,$$

令 $\epsilon(\Delta z)=\rho(\Delta z)\cdot\Delta z$。显然， $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\epsilon(\Delta z)=0$。从而有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\epsilon(\Delta z)。\tag{2.2}$$

(2.2) 式是导数定义的一种等价形式，其右端第一项 $f'(z)\cdot\Delta z$ 称为函数 $f(z)$ 在 z 处的微分，记为 $\mathrm{d}f(z)$, 即 $\mathrm{d}f(z)=f'(z)\cdot\Delta z$。

特别当 $f(z)=z$ 时，有 $\mathrm{d}f(z)=\mathrm{d}z=\Delta z$。于是， $f(z)$ 在 z 点可导，其导数可用微分表示：

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}。$$

利用导数与微分的关系，我们可以由导数的四则运算推出微分的四则运算，读者可以自己推导。

§2.2 解析函数的概念与柯西 – 黎曼方程

一、解析函数的概念

在复变函数理论中，研究的不是只在个别点可导的函数，而是在某些点的邻域内可导的函数。

定义 2.2 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析。

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。假设 D 为一闭域，若有一区域包含闭域 D, 并且 $f(z)$ 在此区域中解析，则称 $f(z)$ 在闭域 D 上解析。

解析函数也称为全纯函数或正则函数。

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。

由定义可知，函数在区域 D 内解析与在 D 内可导是等价的。而函数在一点解析与可导却不是等价的概念。因为若函数 $f(z)$ 在一点 z_0 处解析，则 $f'(z_0)$ 必然存在；反之，若 $f(z)$ 在点 z_0 可导， $f(z)$ 在点 z_0 不一定解析。如例 2.3 中， $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可导，但在 $z=0$ 的任一去心邻域内均不可导，所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析。

因此，函数 $f(z)$ 在一点 z_0 处解析，不仅要求 $f(z)$ 在 z_0 处可导，还必须要求在 z_0 的某个邻域内的任一点都可导。

例 2.6 研究函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 的解析性。

解: 易知 $z\neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^{-1}-z^{-1}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{1}{z^2}$。

所以除 $z=0$ 点外， $w=\dfrac{1}{z}$ 在复平面上处处解析， $z=0$ 是它的奇点。

研究一函数 $f(z)$ 在一区域中是否解析，可以利用导数定义及求导法则，求出此函数的导数，再利用解析函数的定义，确定 $f(z)$ 的解析性，如例 2.6 。但是这种方法仅适用于一些简单函数解析性的判别，对于较复杂的函数则需另辟溪径。

二、柯西 – 黎曼方程

设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导。即 $\forall z\in D$, 有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

其中

$$\begin{aligned} & f(z+\Delta z)-f(z) \\ & \quad = u(x+\Delta x, y+\Delta y)+\mathrm{i}\, v(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)-\mathrm{i}\, v(x, y) \\ & \quad = [u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)]+\mathrm{i}\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)]。\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} & \Delta u = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x, y), \\ & \Delta v = v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x, y), \\ & \Delta z = \Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y, \end{aligned}$$

则 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$, 并且上述极限与 Δz 趋于 0 的方式无关。于是，当 Δz 沿平行于实轴 x 的直线趋近于 0, 即 $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$ 时，有

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\mathrm{i}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right),$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 必然存在，且有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}。\tag{2.3}$$

同样令 $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$, 则有

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\,\Delta v}{\mathrm{i}\,\Delta y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y},$$

故知 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 必然存在，且有

$$f'(z)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{2.4}$$

比较 (2.3) 与 (2.4) 可知：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{2.5}$$

(2.5) 式称为柯西 - 黎曼 (Cauchy–Riemann) 方程或 C–R 条件。

总结上述讨论，得到了函数解析的必要条件。

定理 2.1 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析，则二元实函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在相应点 (x,y) 处有偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y, 并且满足 C–R 条件。

注意：定理 2.1 中的条件仅是必要的，不是充分的。

例 2.7 验证函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足定理 2.1 中的条件，但在 $z=0$ 不可微。

解: 由于 $u(x,y)\equiv\sqrt{|xy|}$, $v(x,y)\equiv 0$,

$$\begin{aligned} & u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0) \\ & u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0), \end{aligned}$$

但是

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$$

在 $\Delta z\to 0$ 时不存在极限。因为当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$ 沿射线 $\Delta y=k\Delta x$ $(\Delta x>0)$ 随 $\Delta x\to 0$ 而趋向零时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=\frac{\sqrt{|k|}}{1+k\,\mathrm{i}},$$

显然极限值与 k 有关。

例 2.8 在函数 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 中， u 与 v 有任意阶偏导数，然而 $f(z)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 内处处不可导。

解: 由于 $f(z)=\mathrm{Re}\,z=x$, 则有 $u=x$, $v=0$。显然 u 与 v 有任意阶偏导数。

对 $\forall\, z\in\mathbf{C}$, 考察极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$$

当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$ 沿平行于 x 轴的直线趋于 0, 即当 $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=1,$$

而当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$ 沿平行于 y 轴的直线趋于 0, 即 $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}=0,$$

所以 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 在 $\mathbf{C}$ 上处处不可导 (参见图 2–1) 。

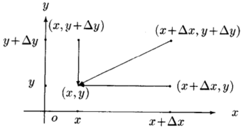


图 2–1

将定理 2.1 中的条件适当加强，就可得到

定理 2.2 (函数解析的充要条件) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是 : $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内任一点 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 处可微，而且满足 C–R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

证明： 必要性。若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 处解析，即 $f(z)$ 在 z 处可微，则有

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\epsilon(\Delta z), \tag{2.6}$$

其中 $\epsilon(\Delta z)\to 0\ (\Delta z\to 0)$ 。

若记 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$, $f'(z)=\alpha+\mathrm{i}\,\beta$, $\Delta f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v$, $\epsilon(\Delta z)=\epsilon_1+\mathrm{i}\,\epsilon_2$, 并且 $\epsilon_1=o(|\Delta z|)$, $\epsilon_2=o(|\Delta z|)$。则 (2.6) 式可写成

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v&=(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+\epsilon_1+\mathrm{i}\,\epsilon_2\\&=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\epsilon_1+\mathrm{i}\,(\beta\Delta x+\alpha\Delta y+\epsilon_2)\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}\Delta u&=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\epsilon_1,\\\Delta v&=\beta\Delta x+\alpha\Delta y+\epsilon_2,\end{aligned}$$

由《高等数学》或《数学分析》中二元函数微分的定义，可知：$u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并且

$$u_x=\alpha,\quad u_y=-\beta,\quad v_x=\beta,\quad v_y=\alpha,$$

从而有 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, 即满足 C–R 条件。

充分性。若二元实函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x,y) 可微，即

$$\begin{aligned}\Delta u&=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\epsilon_1,\\\Delta v&=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\epsilon_2,\end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1=o\big(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\big)$, $\epsilon_2=o\big(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\big)$。

由 C–R 条件，令

$$u_x=v_y=\alpha,\qquad v_x=-u_y=\beta。$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta f&=\Delta u+\mathrm{i}\,\Delta v\\&=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\epsilon_1+\mathrm{i}\,(\beta\Delta x+\alpha\Delta y+\epsilon_2)\\&=(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+\epsilon_1+\mathrm{i}\,\epsilon_2\end{aligned}$$

或写成

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+\mathrm{i}\,\beta+\eta,$$

其中 $\eta=\dfrac{\epsilon_1+\mathrm{i}\,\epsilon_2}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$, 并且有

$$|\eta|\le\frac{|\epsilon_1|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\frac{|\epsilon_2|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0,$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+\mathrm{i}\,\beta,$$

即

$$f'(z)=\alpha+\mathrm{i}\,\beta=u_x+\mathrm{i}\,v_x=v_y-\mathrm{i}\,u_y。$$

由 z 的任意性可知，$f(z)$ 在定义域 D 内任一点均可导，所以 $f(z)$ 在 D 内是解析函数。 □

推论 2.1 若 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 的一阶偏导数在 (x_0,y_0) 点连续，且满足 C–R 条件，则 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $z=x_0+\mathrm{i}\,y_0$ 点可导，且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}。$$

定理 2.2 提供了判别函数解析的一种常用的方法，并且给出了一个简洁的导数公式。

例 2.9 判断下列函数是否解析

(1) $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$; (2) $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}\,(3x^2y-y^3)$。

解: (1) 可知，$u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=xy$, 故有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x。$$

则易知仅当 $x=0$ 且 $y=0$ 时，C–R 条件被满足。因此，函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 仅在点 $z=0$ 处可导，而在任何点处都不是解析的。

(2) 由 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=x^3-3xy^2+\mathrm{i}\,(3x^2y-y^3)$, 得到

$$u(x,y)=x^3-3xy^2,\qquad v(x,y)=3x^2y-y^3,$$

则有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy$。

显然，u, v 满足 C–R 条件，从而 $f(z)$ 在复平面上为解析函数，且

$$f'(z)=(3x^2-3y^2)+\mathrm{i}\cdot 6xy。$$

例 2.10 设 $f(z)=ax^2+bxy+cy^2+\mathrm{i}\,(x^2+xy+dy^2)$ 求常数 a, b, c, d 使 $f(z)$ 在全平面内解析。

解: 设 $u(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$, $v(x,y)=x^2+xy+dy^2$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2ax+by,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=bx+2cy,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x+y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x+2dy。$$

从而，由 C–R 方程得到

$$2ax+by=x+2dy,\qquad bx+2cy=-(2x+y),$$

所以，

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-2,\quad c=-\frac{1}{2},\quad d=-1。$$

例 2.11 证明 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析，且 $f'(z)=f(z)$。

证明： 由于 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$, $v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$, 而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,$$

在复平面内处处连续，且满足 C–R 条件，由定理 2.2 可知，$f(z)$ 在复平面内解析，并且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+\mathrm{i}\,e^x\sin y=f(z)。$$

□

利用定理 2.2, 我们可以导出下面一些较为有用的推论：

推论 2.2 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)=0\ (z\in D)$, 则在 D 内 $f(z)\equiv$ 常数。

证明： 由假设，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内每一点可微，且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}\,v_x=v_y-\mathrm{i}\,u_y=0,$$

则在 D 内必有 $u_x=0$, $v_x=0$, $u_y=0$, $v_y=0$。于是在 D 内 u,v 必为常数，因此在 D 内 $f(z)\equiv$ 常数。 □

推论 2.3 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0\ (z\in D)$, 则 $u(x,y)=C_1$ 与 $u(x,y)=C_2$ (C_1, C_2 为常数) 是 D 内两组正交曲线族。

证明： 由于 $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 必不全为零。

(1) 如果在两曲线的交点 (x,y) 处，$\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}\neq 0$。于是由隐函数求导法则可知，曲线 $u(x,y)=C_1$ 的斜率

$$k_1=-\frac{u_x}{u_y};$$

曲线 $v(x,y)=C_2$ 的斜率

$$k_2=-\frac{v_x}{v_y};$$

由 C–R 条件可得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=-1,$$

这说明 $u(x,y)=C_1$ 与 $v(x,y)=C_2$ 互相正交。

(2) 如果在点 (x,y) 处，u_y 与 v_y 有一个为 0, 则另一个必不为 0, 不妨设 $u_y=0$, $v_y\neq 0$, 则容易知道此时曲线 $u(x,y)=C_1$ 在 (x,y) 处有垂直的切线，由 C–R 条件知：$v_x=u_y=0$, 即 $v(x,y)=C_2$ 在 (x,y) 处有水平的切线，从而它们仍互相正交。 □

推论 2.4 如果 $w=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 为解析函数，则它一定能单独用 z 来表示。

证明： 事实上，$w=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 可以看作两实变量 x,y 的二元函数，而由于

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}),$$

所以 w 又可看作 $z,\bar{z}$ 的复值函数。要证明 w 仅为 z 的函数，只须证明 $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\equiv 0$。

类似于《高等数学》或《数学分析》中偏导数的链式法则，我们有

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)。$$

由于

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y},$$

所以

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

由于 w 为解析函数，由 C–R 条件可知

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\equiv 0。$$

这说明解析函数 $w=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 能单独用 z 来表示。 □

§2.3　初等解析函数

我们知道，在《高等数学》或《数学分析》中有几个常用的基本初等函数，这一节我们将这几个常用基本初等函数推广到复变量的情形并研究它们的性质，特别是解析性质。从中我们发现，复平面与实平面中的基本初等函数有许多相似之处，也存在本质差异。例如，在复平面中 e^z 是周期函数，三角函数 $\sin z$ 与 $\cos z$ 是无界函数，等等。

一、指数函数

定义 2.3 在复平面内定义的一个函数 $f(z)$ 若满足下列三个条件：

(1) $f(z)$ 在复平面内处处解析；

(2) $f'(z)=f(z)$ 而且 $f(0)=1$;

(3) $f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2)$,

则称函数 $f(z)$ 为指数函数。

假设指数函数 $f(z)=u(x,\,y)+\mathrm{i}\,v(x,\,y)$, 则 $u(0,0)=1,\,v(0,0)=0$。由条件 (1) 可知：

$$\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

根据条件 (2), 得:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=u+\mathrm{i}\,v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}=u+\mathrm{i}\,v,$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=u$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=v$。由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=u$ 及 $u(0,0)=1$, 得到 $u(x,y)=\mathrm{e}^{x}\cdot\lambda(y)$, 其中 $\lambda(y)$ 可微，且 $\lambda(0)=1$。由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=v$ 及 $v(0,0)=0$, 得到 $v(x,y)=e^{x}\cdot\mu(y)$, 其中 $\mu(y)$ 可微，且 $\mu(0)=0$。因此有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{x}\cdot\mu'(y)=u=\mathrm{e}^{x}\cdot\lambda(y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{x}\cdot\lambda'(y)=-v=-\mathrm{e}^{x}\cdot\mu(y),$$

即 $\mu'(y)=\lambda(y)$, $\lambda'(y)=-\mu(y)$。从而有

$$\mu''(y)=\lambda'(y)=-\mu(y), \tag{2.7}$$

$$\lambda''(y)=-\mu'(y)=-\lambda(y), \tag{2.8}$$

解微分方程 (2.7) 得

$$\mu(y)=C_1\cos y+C_2\sin y,$$

由于 $\mu(0)=0$, 故 $C_1=0$, 即有 $\mu(y)=C_2\sin y$。从而由 (2.8) 得 $\lambda(y)=\mu'(y)=C_2\cos y$, 再由 $\lambda(0)=1$, 得到 $C_2=1$, 即 $\lambda(y)=\cos y$, $\mu(y)=\sin y$。

最后，我们得到了指数函数的表达式

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\,\sin y)。$$

用 e^{z} 或 $\exp z$ 表示，即

$$\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\,\sin y)。 \tag{2.9}$$

容易验证，它具有如下性质:

(1) 指数函数不取零值，即 $\mathrm{e}^{z}\neq 0$;

(2) $|\mathrm{e}^{z}|=\mathrm{e}^{x}$, $\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^{z}=y+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(3) 对于实数 $z=x\ (y=0)$, 有 $\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x}$, 与通常的指数定义是一致的;

(4) 对于任意的纯虚数 $z=\mathrm{i}\,y$, 有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}=\cos y+\mathrm{i}\,\sin y$;

(5) e^{z} 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期的周期函数，即对任一整数 k, 有 $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z}$;

(6) 极限 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z}$ 不存在，即 e^{∞} 无意义。

二、三角函数

由于

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}=\cos y+\mathrm{i}\,\sin y,\qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y}=\cos y-\mathrm{i}\,\sin y,$$

从而得到

$$\sin y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}},\qquad \cos y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}$$

将其中的实数 y 以复数 z 代替，即可得到复数三角函数的定义。

定义 2.4 称

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\qquad \cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

为复数 z 的正弦函数与余弦函数。

正弦函数与余弦函数具有如下性质：

(1) 当 z 为实数时，与通常的三角函数定义是一致的；

(2) 在复平面上是解析的，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin z)=\cos z,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos z)=-\sin z;$$

(3) $\sin z$ 是奇函数， $\cos z$ 是偶函数，即

$$\sin(-z)=-\sin z,\qquad \cos(-z)=\cos z;$$

(4) $\sin z$ 和 $\cos z$ 以 2π 为基本周期；

(5) 三角公式成立

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,$$
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2;$$

(6) $\sin z$ 和 $\cos z$ 有关系式：

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z;$$

(7) $\sin z$ 的零点为 $z=n\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$, $\cos z$ 的零点为 $z=(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$, 即 $\sin z$ 与 $\cos z$ 仅在它们作为实变量函数的零点处才为 0, 除此之外再无其他零点；

(8) $|\sin z|$ 与 $|\cos z|$ 是无界的。例如，取 $z=\mathrm{i}y$ $(y>0)$, 则

$$\cos(\mathrm{i}y)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2}>\frac{\mathrm{e}^{y}}{2},$$

只要 y 充分大， $\cos(\mathrm{i}y)$ 就可大于任一预先给定的正数。

定义 2.5 规定

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

分别称为 z 的正切、余切、正割和余割函数。

这四个函数都在复平面上使分母不为 0 的点处解析。正切和余切的基本周期为 π, 正割和余割的基本周期为 2π。

我们也可以定义与三角函数密切相关的双曲函数。

定义 2.6 规定

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

分别称为 z 的双曲正弦、双曲余弦、双曲正切和双曲余切函数。

由于 e^z 及 e^{-z} 皆以 $2\pi i$ 为基本周期，故双曲正弦、双曲余弦函数也以 $2\pi i$ 为基本周期，并且 $\frac{d}{dz}\operatorname{sh} z=\operatorname{ch} z$, $\frac{d}{dz}\operatorname{ch} z=\operatorname{sh} z$。

容易验证，三角函数与双曲函数有如下关系：

$$\sin(iz)=i\operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}(iz)=i\sin z,$$

$$\cos(iz)=\operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch}(iz)=\cos z。 \tag{2.10}$$

(2.10) 式不仅说明了三角函数与双曲函数在复数域中无本质区别，并且可以利用 (2.10) 式，从三角函数的性质推出双曲函数的各种特性。此外，许多有关实变量双曲函数的恒等式也可推广到复变量情形，不再一一列举。

三、对数函数

对数函数是作为指数函数的反函数来定义的。

定义 2.7 满足方程 $e^w=z$ $(z\neq 0,\ \infty)$ 的函数 $w=f(z)$ 称为 z 的对数函数，记为 $w=\operatorname{Ln} z$。

由于指数函数 $z=e^w$ 是周期函数，因此 $\operatorname{Ln} z$ 是多值函数。令 $z=re^{i\theta}$, $w=u+iv$, 则

$$e^{u+iv}=re^{i\theta},$$

于是 $e^u=r$, $v=\theta+2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$, 所以 $w=\ln r+i(\theta+2k\pi)$, $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$。即

$$w=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z。 \tag{2.11}$$

在 (2.11) 式中，我们用

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

来表示对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 的主值分支，于是

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)。 \tag{2.12}$$

特别当 $z=x>0$ 时， $\operatorname{Ln} z$ 的主值 $\ln z=\ln x$, 就是普通意义下的实变量函数。

由于

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2,$$

容易得到对数函数的基本性质：

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \qquad (z_1,\ z_2 \neq 0,\ \infty)$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 \qquad (z_1,\ z_2 \neq 0,\ \infty)$$

下面我们讨论对数函数的解析性。对于主值 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$，其中 $\ln|z|$ 除原点外在其它点均连续，而由于当 $x<0$ 时，

$$\lim_{y\to 0^-}\arg(x+\mathrm{i}y) = -\pi, \qquad \lim_{y\to 0^+}\arg(x+\mathrm{i}y) = \pi,$$

所以除去原点及负实轴外，$\arg z$ 在复平面内其它点处均连续。从而可知 $\ln z$ 在复平面上除原点及负实轴外是连续的单值函数。于是由反函数求导法则可知：

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^w}{\mathrm{d}w}} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}。$$

所以，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内解析。由 (2.12) 式可以知道，$\operatorname{Ln} z$ 在除去原点及负实轴的平面内也解析，并且有相同的导数值。

例 2.12 求 $\operatorname{Ln}3$, $\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i})$ 以及与它们相应的主值。

解: $\operatorname{Ln}3 = \ln 3 + 2k\pi\mathrm{i}$，它的主值就是 $\ln 3$;

$$\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i}) = \ln(1+\mathrm{i}) + \operatorname{Arg}(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i},$$

其主值为 $\ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4}\mathrm{i}$。

四、幂函数

定义 2.8 规定 $w = z^a = \mathrm{e}^{a\operatorname{Ln} z}$ ($z\neq 0,\ \infty$; a 为复数）称为 z 的一般幂函数。

显然，由于 $\operatorname{Ln} z$ 是多值函数，一般来说，z^a 也是多值函数 (除 a 为整数外) 。而当 a 为整数时，有

$$z^a = \mathrm{e}^{a\operatorname{Ln} z} = \mathrm{e}^{a(\ln z + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{a\ln z}$$

所以 z^a 具有单一的值。

若 a 为正整数 n，则根据定义，

$$z^n = \mathrm{e}^{n\operatorname{Ln} z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z + \cdots + \operatorname{Ln} z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} z}\cdot\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} z}\cdots\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} z} = z\cdot z\cdot\cdots\cdot z,$$

即通常的幂函数 z^n。

若 a 为 $\dfrac{m}{n}$ (n, m 为正整数，且 $(n,m)=1$) 时，则有

$$\begin{aligned}
z^{\frac{m}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}\operatorname{Ln} z} &= \mathrm{e}^{\frac{m}{n}[\ln|z| + \mathrm{i}(2k\pi + \arg z)]} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{m}{n}\ln|z|}\left(\cos\frac{m(2k\pi+\arg z)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{m(2k\pi+\arg z)}{n}\right) \\
&= |z|^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m(2k\pi+\arg z)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{m(2k\pi+\arg z)}{n}\right) \\
&= \sqrt[n]{z^m},
\end{aligned}$$

其中 $k=0,\ 1,\ 2,\cdots,n-1$。显然 $z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}$ 为 n 值函数，具有 n 个分支。由于 $\mathrm{Ln}\,z$ 的各个分支在除去原点及负实轴的复平面内是解析的，因而不难看出，$z^{\frac{m}{n}}$ 的各个分支在除去原点及负实轴的复平面内也是解析的，并且

$$\left(z^{\frac{m}{n}}\right)'=\left(\sqrt[n]{z^m}\right)'=\left(\mathrm{e}^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}\,z}\right)'=\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}。$$

若 α 为无理数或复数时，z^α 为无穷多值函数。

例 2.13 求 i^{i}。

解: $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$, $(k=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$, 而 i^{i} 的主值为 $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$。

例 2.14 求 $2^{1+\mathrm{i}}$。

解: $2^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{Ln}\,2}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(\ln 2+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{(\ln 2-2k\pi)+\mathrm{i}(\ln 2+2k\pi)}$

$=\mathrm{e}^{\ln 2-2k\pi}\left(\cos\ln 2+\mathrm{i}\sin\ln 2\right)$, $\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$,

$2^{1+\mathrm{i}}$ 的主值为 $\mathrm{e}^{\ln 2}\left(\cos\ln 2+\mathrm{i}\sin\ln 2\right)$。

五、反三角函数和反双曲函数

反三角函数是作为三角函数的反函数来定义的。

定义 2.9 *满足方程 $\sin w=z$ 的函数 $w=f(z)$ 称为 z 的反正弦函数，记为 $w=\mathrm{Arcsin}\,z$。*

由于正弦函数 $\sin w$ 可以用指数函数来定义，因此，反正弦函数也可以用对数函数来表示。

由于 $\sin w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}$, 即 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}=z$, 亦即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w}-2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-1=0$, 解方程得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z\pm\sqrt{1-z^2}。$$

由于 $\sqrt{1-z^2}$ 是二值的，所以

$$w=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$$

即 $\mathrm{Arcsin}\,z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$。显然，$\mathrm{Arcsin}\,z$ 是多值函数。

类似地，可以定义反余弦函数 $w=\mathrm{Arccos}\,z$, 反正切函数 $w=\mathrm{Arctan}\,z$, 反余切函数 $w=\mathrm{Arccot}\,z$, 并且

$$\mathrm{Arccos}\,z=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arctan}\,z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\,\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z},$$

$$\mathrm{Arccot}\,z=\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}。$$

显然，反三角函数都是多值函数。这些函数解析性的讨论，同前面的方法类似，只是更加复杂、困难。所有这些分支在适当割破平面后的区域内单值解析。它们的导函数分别为

$$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad (\operatorname{Arccos} z)' = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(\operatorname{Arctan} z)' = \frac{1}{1+z^2}, \qquad (\operatorname{Arccot} z)' = \frac{-1}{1+z^2}。$$

例 2.15 求 $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}$。

解:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\ln\left(\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi\mathrm{i}\right)\\ &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}。\end{aligned}$$

与反三角函数的定义相类似，我们可以定义双曲函数的反函数为反双曲函数，并且有

反双曲正弦 $\qquad \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$

反双曲余弦 $\qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$

反双曲正切 $\qquad \operatorname{Arth} z = \operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}。$

显然它们都是多值函数。

习 题 二

1. 下列函数在何处可导？何处不可导？何处解析？何处不解析？

   (1) $w = \overline{z} \cdot z^2$;

   (2) $w = x^2 + \mathrm{i}\,y^2$;

   (3) $w = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}\,(3x^2y - y^3)$;

   (4) $w = z + \frac{1}{z-1}$。

2. 试证下列函数在复平面上任何点都不解析：

   (1) $|z|$; (2) $x + y$; (3) $\frac{1}{\overline{z}}$。

3. 试证下列函数在复平面上解析，并分别求出其导函数：

   (1) $f(z) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$;

   (2) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\,\cos x \operatorname{sh} y$;

   (3) $f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - i\,\sin x \operatorname{sh} y$。

4. 若 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 点解析，且 $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$。试证：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}。$$

5. 设函数 $f(z) = m y^3 + nx^2y + \mathrm{i}(x^3 + lxy^2)$ 是全平面内的解析函数，求 l, m, n 的值。

6. 设

$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0。\end{cases}$$

试证：这个函数在全平面上处处满足柯西－黎曼条件，但它在 $z = 0$ 处不解析，甚至在 $z = 0$ 处不连续。

7. 设函数 $f(z) = u + \mathrm{i}\,v$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数：

(1) $\mathrm{Re}\,f(z)$ 或 $\mathrm{Im}\,f(z)$ 在 D 内为常数；

(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数；

(3) $v = u^2$；

(4) $f(z)$ 只取实值或只取纯虚值。

8. 求证：若 $f(z), g(z)$ 都在同一区域 D 内解析，且 $\mathrm{Re}\,f(z) = \mathrm{Re}\,g(z)$, 则 $f(z) - g(z)$ 必为一纯虚常数。

9. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析而且在 D 内恒不为零，证明：

$$\left[\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right]^2 = |f'(z)|^2, \quad \forall z \in D。$$

10. 下列中值公式是否成立：设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则对 $\Delta z \neq 0$, 恒有：

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta z \cdot f'(z_0 + \theta\,\Delta z), \qquad 0 < \theta < 1。$$

11. 已知下列关系式，试确定解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}\,v$ ：

(1) $u + v = x^2 + 2xy - y^2$, (2) $u + v = x^2 - y^2 + 2xy - 5x - 5y$。

12. 证明在极坐标系下的柯西－黎曼条件是：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\,\frac{\partial v}{\partial r}。$$

13. 找出下列推理的错误：因为 $(-z)^2 = z^2$, 所以 $2\,\mathrm{Ln}\,(-z) = 2\,\mathrm{Ln}\,z$。因此 $\mathrm{Ln}\,(-z) = \mathrm{Ln}\,z$。

14. 试求出下列各值，并指出主值：

(1) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}$; (2) $\mathrm{Ln}\,(-3 + 4\mathrm{i})$; (3) $\cos(1 + \mathrm{i})$;

(4) $\tan(3 - \mathrm{i})$; (5) $\mathrm{Arctan}\,(1 + 2\,\mathrm{i})$; (6) $(-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$;

(7) $(-2)^{\sqrt{2}}$。

15. 解下列方程

(1) $\mathrm{Ln}\,z = -\mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{2}$; (2) $\mathrm{Ln}\,z = 1 + \mathrm{i}\,\pi$。

第三章　复变函数的积分

复变函数的积分理论是研究解析函数理论的基础也是重要的工具。借助它，我们可以证明解析函数在区域内的函数值完全由它在边界上的性质所决定的特性及解析函数的各阶导数的存在性，同时也可计算一些实函数的积分。本章主要介绍柯西积分定理、柯西积分公式及高阶求导公式等一些基本内容。

§3.1　复变函数积分概念

一、复变函数积分概念

为了方便起见，我们约定在本章及以后各章中关于积分所用的曲线，除了特别申明外，均为光滑曲线或按段光滑曲线，因而是可求长的。同《高等数学》或《数学分析》中的定义曲线积分概念相类似，我们首先来定义曲线的方向。

曲线的方向规定为：若曲线 C 不是封闭的，则按指定的起始点到终点的方向为正向，反之则为负向并记为 C^-；若曲线 C 是封闭的，当观察者沿着曲线环行时，若以 C 为边界的有界区域 D 总在他的左侧，则 C 的方向为正向，反之则为负向并记为 C^- (参见图 3–1) 。规定了方向的曲线称为有向曲线。

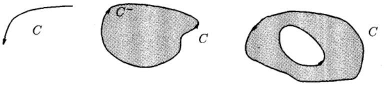


图 3–1

由于复变函数可以看成是单变量的函数也可以看成是两个变量的函数，因此在定义复变函数的积分时，我们要考虑这个定义能否兼容一元实函数及二元实函数的积分定义。由此，我们给出复变函数的积分定义如下：

定义 3.1 设有向曲线 C: $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ 的起点为 $A = z(\alpha)$, 终点为

$B=z(\beta)$。设复变函数 $f(z)$ 在曲线 C 上有定义。沿着 C 从 A 到 B 插入 $n-1$ 个分点:

$$A=z_0,\, z_1,\cdots,z_{k-1},\, z_k,\cdots,z_{n-1},\, z_n=B$$

将曲线 C 分成 n 个曲线段 (图 3–2) 。

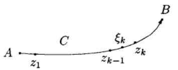


图 3–2

在每个曲线段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_k 作和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})。$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|$ $(\Delta z_k=z_k-z_{k-1})$。若 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 存在且其值不依赖于 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 及 $\{z_1,\cdots,z_{n-1}\}$ 的选择，则称 $f(z)$ 关于 C 可积并称此极限值为复变函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$。若 C 是正向闭曲线，则以 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 表示 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$。在 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 中，$f(z)$ 是被积函数，z 是积分变量。易知，$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 与 z 的选取无关，即 $\int_C f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$。

二、积分的基本性质

有了积分的定义后，我们首先关心的是复变函数的积分在什么时候存在，然后是它是如何计算的？首先，我们有

定理 3.1 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在曲线 C 上连续，则 $f(z)$ 关于 C 可积且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y。$$

证明： 设曲线 C 的起点为 A 终点为 B。取定义 3.1 中的分割

$$A=z_0,\, z_1,\cdots,\, z_n=B,\quad z_k=x_k+\mathrm{i}\,y_k。$$

设 $\xi_k=\lambda_k+\mathrm{i}\,\mu_k$ 为曲线段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 上的任意一点。则

$$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=(x_k-x_{k-1})+\mathrm{i}\,(y_k-y_{k-1})=\Delta x_k+\mathrm{i}\,\Delta y_k,$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n}[u(\lambda_k,\mu_k)+\mathrm{i}\,v(\lambda_k,\mu_k)](\Delta x_k+\mathrm{i}\,\Delta y_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}[u(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k - v(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k]\\
&\quad + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}[v(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k + u(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k]。
\end{aligned}
$$

由于 $f(z)$ 在曲线 C 上连续，故 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 C 上也连续且当 $\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0$ 时，$\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k|$ 及 $\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta y_k|$ 都趋于 0。于是，利用二元连续函数的第二型曲线积分的性质可以得到：

$$
\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_C u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y,
$$

自然， $f(z)$ 也就可积了。 □

这个定理表明，复变函数的积分实际上可以化成为我们熟知的二元函数的第二型曲线积分。

根据复变函数积分的定义，我们可以得到下面的一些性质：

命题 3.1 设 $f(z), g(z)$ 在正向曲线 C 上可积（或连续），则

(1) $\displaystyle\int_C(\alpha f(z)+\beta g(z))\,\mathrm{d}\,z = \alpha\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z + \beta\int_C g(z)\,\mathrm{d}\,z$, 其中 α,β 是两个常数；

(2) $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$;

(3) 设曲线 C 由正向曲线 C_1 和 C_2 首尾相连接而成。于是，

$$
\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z;
$$

(4) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}\,s$, 其中 $\mathrm{d}\,s$ 是 C 的弧长微分。若 $C\colon z=z(t),\ a\le t\le b$, 则

$\mathrm{d}\,s = |z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$。

三、复变函数积分举例

设正向光滑曲线 C 由 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ a\le t\le b$ 表示，而 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 C 上连续。由于

$$
\begin{aligned}
\int_C u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y &= \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}\,t\\
\int_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y &= \int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}\,t,
\end{aligned}
$$

故

$$
\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,\mathrm{d}\,t。 \tag{3.1}
$$

若 C 是按段光滑曲线，我们可以用命题 3.1 (3), 将 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 化成为有限个光滑曲线上的积分和，再对每个积分用公式 (3.1) 。

例 3.1 分别计算积分 $\int_C z\,\mathrm{d}z$ 及 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是:

(1) 从原点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的直线段;

(2) 从原点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 再从点 $(1,0)$ 到点 $(1,1)$ 连接的折线段;

(3) 从原点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的抛物线段 $y=x^2$。

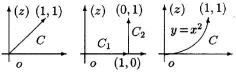


图 3–3

解: (1) C 的方程为

$$z=z(t)=t+\mathrm{i}t,\ 0\le t\le 1。$$

故

$$\int_C z\,\mathrm{d}z=\int_0^1(t+\mathrm{i}t)(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t=\mathrm{i},\quad \int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^1(t-\mathrm{i}t)(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t=1。$$

(2) 如图 3–3 所示， $C=C_1+C_2$, C_1, C_2 的方程分别为

$$z=z_1(t)=t,\ z=z_2(t)=1+\mathrm{i}t,\quad 0\le t\le 1。$$

所以，

$$\int_C z\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\int_0^1(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}$$

$$\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} \bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\int_0^1(1-\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t=1+\mathrm{i}。$$

(3) C 的方程为 $z=z(t)=t+\mathrm{i}t^2$, $0\le t\le 1$。从而

$$\int_C z\,\mathrm{d}z=\int_o^1(t+\mathrm{i}t^2)(1+2\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}$$

$$\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_o^1(t-\mathrm{i}t^2)(1-2\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t=1+\frac{\mathrm{i}}{3}。$$

从这个例子可以看出，对从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的不同路径 C, $\int_C z\,\mathrm{d}z$ 始终不变而 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$ 却一直在随之变化。对于起点、终点不变的不同路径 C, 若 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 始终不变，我们就称积分与路径 C 无关。这个概念在《高等数学》或《数学分析》中是出现过的，而且与路径无关的条件也是可以被刻画出来的。对于复变函数积分与路径的无关性的讨论将在后面进行。

例 3.2 计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z$$

其中， n 为整数， C 是以 z_0 为圆心， r 为半径的正向圆周。

解: C 的方程为 $z = z(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t \le 2\pi$, 所以 $\mathrm{d}\,z = \mathrm{i}\,r e^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}\,t$。于是，

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\,r e^{\mathrm{i}\,t}}{r^{n+1}e^{\mathrm{i}\,(n+1)t}}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases},$$

这是因为，当 $n \neq 0$ 时，

$$\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{\mathrm{i}\,n}e^{-\mathrm{i}\,nt}\Big|_0^{2\pi} = 0。$$

§3.2 柯西积分定理

一、柯西积分定理

在上一节的例 3.1 中，我们计算出了 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 在 C 取起点和终点固定的三条不同路径时的值，它们都是 i。由此，我们是否就能断定 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 与路径无关？一般来说，如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析而 C_1, C_2 是 D 中具有相同起点与终点的两条正向曲线，则由积分的性质

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

当且仅当 $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-$ 为 D 中的简单闭曲线。由此，我们可以推得：对于 D 中的任何曲线 C, $\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 与路径 C 无关的充要条件是：对于 D 中的任何简单闭曲线 Γ, $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。这样，我们自然要求 D 是一个单连通区域。下面的两个定理指出了单连通区域上的解析函数恰有这样的性质。

定理 3.2 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且 $f'(z)$ 在 D 内连续。若 C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线，则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

证明： 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$, $z = x + \mathrm{i}\,y \in D$。由于 $f(z)$ 在 D 内解析，故

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。\tag{3.2}$$

于是，$f'(z)$ 的连续性意味着 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在 D 内连续。

由定理 3.1,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \oint_C u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y + \mathrm{i}\oint_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y,$$

所以，我们只需证明： $\oint_C u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y = \oint_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y = 0$。

由《高等数学》或《数学分析》中的格林 (Green) 公式及 (3.2) 式得：

$$\oint_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y = \iint_{\overline{G}} (\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 0$$
$$\oint_C v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y = \iint_{\overline{G}} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 0,$$

其中 $\overline{G}$ 是 C 的内部与 C 的并。这就证明了 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。 □

上述的结果是黎曼在 1851 年证明的。在这个证明中，附加了 $f'(z)$ 连续这个条件。但到 1900 年时，由古沙特 (Gousart) 给出了一个新的证明。在他的证明中，把 $f'(z)$ 连续这个条件去掉了，即他证明了这样一个命题：

定理 3.3 *设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析， C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线。则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。*

他的证明思想是这样的：首先证明 C 可用一条封闭折线 L 逼近，然后再证明 $f(z)$ 在 L 上的积分为零。由于根据积分性质，可将闭折线上的积分分解为若干个小三角形边界上的积分之和 (如图 3–4 所示， L 上的积分可化为四个三角形上的积分之和), 因此最终将此定理的证明化为：对 D 中任意一个三角形 $\triangle$, $\oint_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ 即可。

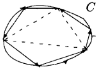


图 3–4

首先，我们证明：

命题 3.2 *设 Γ 是 D 中的一条起点为 A 终点为 B 的正向光滑曲线。则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 D 中的一条折线 L 使得*

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| < \epsilon。$$

证明： 由于 $f(z)$ 在 D 内解析，故在 Γ 上一致连续 (参见附录一), 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$ 且 $|\xi_1 - \xi_2| < \delta_0$ 时， $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \dfrac{\epsilon}{2l}$, 其中 l 为 Γ 的长度，同时由定理 3.1, $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 也存在。

由积分的定义，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得对 Γ 的任何分割

$$A = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}, \eta_n = B$$

及小弧段 $\widehat{\eta_j\eta_{j+1}}$, $j=0,1,\cdots,n-1$ 上的任意一点 ξ_j, $j=0,1,\cdots,n-1$ 只要 $|\eta_{j+1}-\eta_j|<\delta_1$, $j=0,1\cdots,n-1$, 就有

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_j)(\eta_{k+1}-\eta_k)\right|<\frac{\epsilon}{2}。$$

现取 Γ 上的一个分割

$$A=z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1},\ z_n=B$$

使得 $|z_{j+1}-z_j|<\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,d\}$, 其中 d 为 Γ 上各点到 D 的边界上各点的距离中的最短距离。则

$$|f(\xi_j)-f(z_{j-1})|<\frac{\epsilon}{2l},\ \forall\xi_j\in\overline{z_{j-1}z_j},\quad j=1,\cdots,n$$

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\sum_{k=0}^{n}f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right|<\frac{\epsilon}{2},$$

这里 $\overline{z_{j-1}z_j}$ 表示连接 z_{j-1},z_j 的线段， $j=1,\cdots,n$。令 L 是由 $z_0,\cdots,z_n$ 顺次连接而成的正向折线段。则 L 在 D 内，而且

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{j=1}^{n}\int_{\overline{z_{j-1}z_j}}f(z)\,\mathrm{d}\,z。$$

注意到 $\overline{z_{j-1}z_j}$ 可以表示为

$$z=z_j(t)=(1-t)z_{j-1}+tz_j,\ 0\le t\le 1,\ j=1,\cdots,n,$$

所以，对 $\forall t\in[0,1]$, $|z_{j-1}-z_j(t)|=t|\Delta z_j|<\delta$, 其中 $\Delta z_j=z_{j-1}-z_j$, $j=1,\cdots n$。于是，对 $j=1,\cdots,n$,

$$\left|\int_{\overline{z_{j-1}z_j}}f(z)\,\mathrm{d}\,z-f(z_j)\Delta z_j\right|\le\int_0^1|f(z_j(t))-f(z_j)||\Delta z_j|\,\mathrm{d}\,t<\frac{\epsilon}{2l}|\Delta z_j|,$$

即得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|=&\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\sum_{j=1}^{n}f(z_{j-1})\Delta z_j\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{n}f(z_{j-1})\Delta z_j-\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\\<&\frac{\epsilon}{2}+\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{\overline{z_{j-1}z_j}}f(z)\,\mathrm{d}\,z-\sum_{j=1}^{n}f(z_{j-1})\Delta z_j\right|\\<&\frac{\epsilon}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\epsilon}{2l}|\Delta z_j|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2l}l=\epsilon。\end{aligned}$$

□

我们对周长为 l 的任意三角形 $\triangle$ 来证明 $\oint_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z=0$。记 $\triangle$ 的周长为 $|\triangle|=l$。设 $\left|\oint_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z\right|=M>0$。将三角形 $\triangle$ 三边的中点相连，这样就可得到四个全等的正向三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$, 其周长都是 $\dfrac{l}{2}$ (参见图 3–5) 。于是，

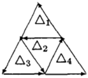


图 3–5

$$\oint_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{4}\oint_{\triangle_j} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

从而，

$$\sum_{j=1}^{4}\left|\oint_{\triangle_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geq\left|\oint_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z\right|=M。$$

这样，在 $\left|\oint_{\triangle_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ $(j=1,\cdots,4)$ 中至少有一个 $\geq\dfrac{M}{4}$。

我们将满足上述性质的 $\triangle_1,\cdots,\triangle_4$ 中的一个记为 $\triangle^{(1)}$, 即

$$\left|\oint_{\triangle^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geq\frac{M}{4},\ |\triangle^{(1)}|=\frac{l}{2}。$$

对 $\triangle^{(1)}$ 再采用上述的方法，得到 $\triangle^{(2)}$, 使得

$$\triangle^{(2)}\subset\triangle^{(1)},\ |\triangle^{(2)}|=\frac{l}{2^2},\ \left|\oint_{\triangle^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geq\frac{M}{4^2}。$$

这样依次下去，我们就可以找到一串三角形序列 $\{\triangle^{(n)}\}_1^\infty$ 满足性质：

$$\triangle^{(n)}\subset\triangle^{(n+1)},\ |\triangle^{(n)}|=\frac{l}{2^n},\ \left|\oint_{\triangle^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\geq\frac{M}{4^n},\ n=1,2,\cdots。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|\triangle^{(n)}|=0$, $\{\triangle^{(n)}\}_1^\infty$ 是一个区域套，故有且仅有一点 $z_0\in\triangle^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$。由 $f(z)$ 在 z_0 处解析可得：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|\leq\epsilon|z-z_0|。\tag{3.3}$$

对于上述的 $\delta>0$, 可以找到自然数 N, 使得当 $n>N$ 时， $\dfrac{l}{2^n}<\delta$。这样一来，必有 $\triangle^{(n)}\subset U(z_0,\delta), \forall n>N$。不然，若有 $n_0>N$ 及 $z'\in\triangle^{(n)}$ 使得 $|z'-z_0|\geq\delta$, 则由 $|z'-z_0|\leq|\triangle^{(n_0)}|=\dfrac{l}{2^{n_0}}<\delta$ 得出矛盾。所以，对任何 $z\in\triangle^{(n)}$, 关系式 (3.3) 成立。

利用 §3.2 中的积分计算公式，可以算出

$$\oint_{\triangle^{(n)}} f(z_0)\,\mathrm{d}z=f(z_0)\oint_{\triangle^{(n)}}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{\triangle^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0)\,\mathrm{d}z=f'(z_0)\oint_{\triangle^{(n)}}(z-z_0)\,\mathrm{d}z,\ \forall n>N$$

于是，

$$\oint_{\triangle^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{\triangle^{(n)}}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,\mathrm{d}z。\tag{3.4}$$

从而，当 $n > N$ 时，由 (3.3) 式及 (3.4) 式得：

$$\left|\oint_{\triangle^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq \oint_{\triangle^{(n)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|\,\mathrm{d}\,s$$
$$<\epsilon \oint_{\triangle^{(n)}} |z - z_0|\,\mathrm{d}\,s \leq \epsilon \frac{l}{2^n}\frac{l}{2^n} = \frac{\epsilon l}{4^n}。$$

但另一方面，$\left|\oint_{\triangle^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \geq \frac{M}{4^n}$，$n = 1, 2, \cdots$，故 $M \leq \epsilon l$。从而由 ϵ 的任意性得到 $M = 0$。于是，对 D 中的任意闭折线 L，$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

将定理 3.3 的证明稍作修改，我们可以得到下面的结论：

定理 3.4 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，在它的边界 ∂D 上连续。若 ∂D 是一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0。$$

二、变上限积分与原函数

在前面，我们知道了这样的事实：若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续而且对 D 内的任何正向简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$，则对 D 中给定的两点 A, B 及以 A 为起点 B 为终点的任意曲线 $L \subset D$ 都有 $\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 与 L 的性状无关。此时，我们用 $\int_A^B f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 来表示 $\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z$。柯西积分定理表明，当 $f(z)$ 在 D 内解析时，$\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 与 L 无关。

反过来，我们将在第三节中证明：若 $f(z)$ 在 D 内连续而且对 D 内任何简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$，则 $f(z)$ 必在 D 内解析。

定理 3.5 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续且对 D 内任何简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。令

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi,\ z_0, z \in D,\ z_0\ 固定。$$

则 $F(z)$ 在 D 内解析而且 $F'(z) = f(z)$，$z \in D$。

证明： 由于 $f(\xi)$ 在 D 内连续，故对任何 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|\xi - z| < \delta$ 时，$|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$。取 Δz 充分小，使得 $z + \Delta z \in D$ 且 $|\Delta z| < \delta$。于是，对任意 $\xi \in \overline{z, z + \Delta z}$ 就有 $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$。

由 $F(z)$ 的定义可得，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta z}(F(z+\Delta z)-F(z))-f(z)\\
=&\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi-\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\right)-\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\,\xi\\
=&\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\xi)-f(z)]\,\mathrm{d}\,\xi,
\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\Delta z}(F(z+\Delta z)-F(z))-f(z)\right| &\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{\overline{z,z+\Delta z}}|f(\xi)-f(z)|\,\mathrm{d}\,s\\
&<\frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z|=\epsilon,
\end{aligned}$$

即 $F'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$。 □

定理 3.5 中的 $F(z)$ 称为变上限积分。定理中的结论与一元函数微积分中的微积分基本定理的形式完全一致。进而，我们还可以引进复变函数的原函数的概念如下：

定义 3.2 *设 $f(z)$ 在区域 D 内连续。若存在 D 内的解析函数 $F(z)$ 使得 $F'(z)=f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。*

由于导数相等的两个解析函数只相差一个常数，所以若 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则 $f(z)$ 的原函数的全体为 $\{F(z)+C \mid \forall\, C\in\mathbf{C}\}$。

利用原函数的概念，我们可以推出和微积分中的牛顿－莱布尼兹 (Newtown–Leibiniz) 公式相类似的积分计算公式如下：

定理 3.6 *设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，$G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。则对 $\forall a,b\in D$，*

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}\,z=G(b)-G(a)=G(z)|_a^b。$$

证明： 由柯西积分定理，可设 $F(z)=\displaystyle\int_a^z f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi,\ z\in D$。于是由定理 3.5 得 $F'(z)=f(z)$。又由于存在常数 C 使得 $G(z)=F(z)+C,\ z\in D$ 而且 $F(a)=0,\ F(b)=\displaystyle\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}\,z$，所以，

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}\,z=F(b)=G(b)-C=G(b)-G(a)。$$

□

例 3.3 $\displaystyle\int_0^{1+\mathrm{i}} z^2\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{3}(1+\mathrm{i})^3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}$。

例 3.4 *在区域 $D=\{z\mid -\pi<\arg z<\pi\}$ 内，$\ln z$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的一个原函数而 $f(z)$ 在 D 内解析，故*

$$\int_1^z\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\,\xi=\ln z-\ln 1=\ln z,\quad z\in D。$$

§3.3 复合闭路定理

在前一节中，我们讨论了解析函数在单连通区域内的简单闭曲线上的积分问题并证明了该积分值为零。在讨论中，单连通这个条件是必不可少的。比如，函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ 在 $0<|z-z_0|<r$ 内解析在 $|z-z_0|=r$ 上连续而且

$$\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i}\neq 0。$$

这个结果主要产生于 $0<|z-z_0|<r$ 不是单连通区域。

但在我们经常遇到的问题中，不是单连通区域的情况占了很大的比例，因此我们有必要对不是单连通的情况进行讨论并设法将此情形转化为可以用已知结果来处理的问题。

首先，我们设区域 D 有一个洞，即 D 的边界 C 由外边界 C_1 及内边界 C_2 组成，C_1 与 C_2 均是正向简单闭曲线， C_1 与 C_2 不相交， C_2 包含在 C_1 中 (如图 3–6 所示) 。

用割线 L 将 D 割开并将 C_1,C_2 连接起来。割破后的区域是一个单连通区域，边界为 $\Gamma=C_1+L+L^-+C_2^-$。

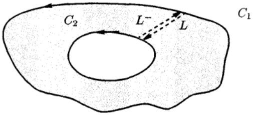


图 3–6

设 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C_1,C_2 上连续。于是由柯西积分定理得到 $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$; 再由积分性质推出

$$\begin{aligned}0&=\oint_{C_1}F(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_{L^-}f(z)\,\mathrm{d}\,z-\oint_{C_2}f(z)\,\mathrm{d}\,z\\&=\oint_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}\,z-\oint_{C_2}f(z)\,\mathrm{d}\,z,\end{aligned}$$

即 $\oint_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}\,z=\oint_{C_2}f(z)\,\mathrm{d}\,z$。这个等式说明 $f(z)$ 沿外边界的积分与沿内边界的积分相等。这个性质与《高等数学》或《数学分析》中二元函数的第二型曲线积分的性质相似。

用上述的方法，我们可以得到更一般的结果如下：

定理 3.7 (复合闭路定理) 设区域 D 的边界 C 由一些互不相交的正向简单闭曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 组成且 $C_2,\cdots,C_n$ 包含在 C_1 的内部。设 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连

续。则

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{j=2}^{n}\oint_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}\,z。\tag{3.5}$$

用公式 (3.5) 计算积分，往往带来许多的方便。

例 3.5 设 C 是复平面 $\mathbf{C}$ 内包含 z_0 的任意一条简单闭曲线。证明:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}。$$

证明：在 C 的内部作一个以 z_0 为圆心、以 r 为半径的正向小圆 C_r。于是 $\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 C 与 C_r 围成的区域内解析。从而由定理 3.7 及 §3.1 中的例 3.2 得到:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}。$$

□

例 3.6 计算 $\oint_C \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z$, 其中 C 为包含圆盘 $|z|\le 1$ 在其内部的任何正向简单曲线。

解: $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$ 在 C 的内部有两个奇点 $z=0$ 及 1。现在分别以 0,1 为圆心作两个正向圆周:

$$C_1: |z|=r_1,\ C_2: |z-1|=r_2$$

使得 C_1 与 C_2 不相交。由于 $f(z)$ 在 C 与 C_1, C_2 围成的区域内解析，故由定理 3.7 得

$$\oint_C \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z=\oint_{C_1} \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z+\oint_{C_2} \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z。$$

注意到

$$\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z},$$

$\frac{1}{z-1}$ 在 C_1 的内部解析，$\frac{1}{z}$ 在 C_2 的内部解析，故

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z=\oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i}$$
$$\oint_{C_2} \frac{1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z=-\oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z=-2\pi\mathrm{i}。$$

于是，原式 $=2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}$。

§3.4 柯西积分公式

一、柯西积分公式

在许多实际问题中，比如在解偏微分方程中，我们对解的条件总是加在边界上并希望能够用函数在边界上的性质来刻画它在区域内部的性质。对复变函数来讲，我们自然希望也是如此。

比如，设 $f(z)=z^2+2z$ 在区域 $D=\{z\mid |z-z_0|\le r\}$ 上解析。我们已经知道，

$$1=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{\mathrm{d}\,z}{z-z_0},\quad f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}\,z。$$

现在我们把被积函数 $\dfrac{f(z_0)}{z-z_0}$ 换成 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$，看一看会发生什么情况。事实上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}\,z=&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{(z-z_0)^2+(2z_0+2)(z-z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}\,z\\=&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}(z-z_0+2z_0+2)\,\mathrm{d}\,z+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}\,z\\=&f(z_0)。\end{aligned}$$

这表明，$f(z_0)$ 可用 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在边界 $|z-z_0|=r$ 上的积分来表示。这个性质并不是偶然的，一般我们有

定理 3.8（柯西积分公式）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 $C=\partial D$ 上连续。设 C 是由一些正向简单闭曲线组成，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi,\quad \forall\, z\in D。$$

证明： 对于任意固定的 $z\in D$, $g(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ 在 D 内除了奇点 z 外解析。

由于 $f(\xi)$ 在 D 内解析，故对 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $\xi\in U(z,\delta)\subset D$ 时，$|f(\xi)-f(z)|<\epsilon$。

在 D 内以 z 为圆心，$\dfrac{\delta}{2}$ 为半径作正向圆周 C_δ (如图 3–7 所示）。则由复合闭路定理得

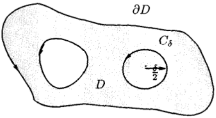


图 3–7

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi。 \tag{3.6}$$

注意到

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\delta} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| &\le \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\delta} \frac{|f(z) - f(\xi)|}{|\xi - z|} \mathrm{d}s \\ &< \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\delta} \frac{\epsilon}{0.5\,\delta} \mathrm{d}s = \epsilon, \end{aligned}$$

于是，由 (3.6) 式得

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| < \epsilon。 \tag{3.7}$$

因为不等式 (3.7) 的左边是与 ϵ 无关的常数而 ϵ 又是任意的，所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi。$$

□

推论 3.1 (解析函数平均值公式) 设 $f(z)$ 在区域 $|z - z_0| < r$ 内解析，在 $|z - z_0| = r$ 上连续。则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta。$$

证明： 令 $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta \in [0, 2\pi]$。则由柯西积分公式得到

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta。$$

□

例 3.7 $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z = \cos z|_{z=0} = 1$。

例 3.8 求 $\displaystyle \oint_{|z|=4} \frac{3z - 1}{(z+1)(z-3)} \mathrm{d}z$。

解: (解一) 由于

$$\frac{3z - 1}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3},$$

故

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=4} \frac{3z - 1}{(z+1)(z-3)} \mathrm{d}z &= \oint_{|z|=4} \frac{\mathrm{d}z}{z+1} + \oint_{|z|=4} \frac{2\mathrm{d}z}{z-3} \\ &= 2\pi \mathrm{i} + 2 \cdot 2\pi \mathrm{i} = 6\pi \mathrm{i}。 \end{aligned}$$

（解二）$f(z)=\dfrac{3z-1}{(z+1)(z-3)}$ 在 $\mathbf{C}$ 内有两个奇点 $z=-1$ 及 3。分别以 -1 及 3 为圆心在 $|z|<4$ 内作两个不相交的正向圆周 C_1 及 C_2。则由复合闭路定理得

$$\oint_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z。$$

再由柯西积分公式得

$$\oint_{C_1}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{\frac{3z-1}{z-3}}{z+1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{3z-1}{z-3}\right|_{z=-1}=2\pi\mathrm{i}$$

$$\oint_{C_2}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z=\oint_{C_2}\frac{\frac{3z-1}{z+1}}{z-3}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{3z-1}{z+1}\right|_{z=3}=4\pi\mathrm{i}。$$

所以，原式 $=2\pi\mathrm{i}+4\pi\mathrm{i}=6\pi\mathrm{i}$。

二、高阶求导公式

从柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$

其中 $C:|\xi-z_0|=r$, $f(\xi)$ 在 $|\xi-z_0|<r$ 内解析，在 C 上连续； z 在 $|\xi-z_0|<r$ 内，两边同时求导并假设导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ 与积分 $\oint_C$ 可以交换，则

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi。$$

这是一个用不严格的方法得到的等式，但这个等式确实是成立的，这就是所谓的解析函数的高阶求导公式，准确地说，就是下面的定理：

定理 3.9 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 $C=\partial D$ 上连续。设 C 是由一些正向简单闭曲线组成。则 $f(z)$ 在 D 内有任何阶导数且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\ \forall z\in D。$$

证明： 我们只证明 $n=1$ 的情况，对于一般的 n 可用数学归纳法证明。

取充分小的 $\delta>0$, 使得 $U(z,\delta)\subset D$。这样，当 $|\Delta z|<\delta$ 时， $z+\Delta z\in U(z,\delta)\subset D$。由柯西积分公式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta z}(f(z+\Delta z)-f(z))&=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_C\frac{f(z)}{\xi-z-\Delta z}\mathrm{d}\xi-\oint_C\frac{(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi。\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta z}(f(z+\Delta z)-f(z))-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi\\&\qquad=\frac{\Delta z}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi。\end{aligned}$$

又由于 $f(\xi)$ 在 C 上连续，故存在 $M>0$ 使得 $|f(\xi)|\le M,\ \forall\xi\in C$。设 d 为 z 到 C 上各点距离中的最短距离。于是，对任意 $\xi\in C,\ |\xi-z|\ge d>0$。取 Δz 使得 $|\Delta z|<\min(\delta,0.5\,d)$。则 $|\xi-z-\Delta z|>|\xi-z|-|\Delta z|\ge d-0.5\,d=0.5\,d$, 从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Delta z}(f(z+\Delta z)-f(z))-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,\mathrm{d}\,\xi\right|&\le\frac{|\Delta z|}{2\pi}\oint_C\frac{M}{0.5d\cdot d^2}\,\mathrm{d}\,s\\&=\frac{2LM}{d^3}|\Delta z|,\end{aligned}$$

其中 L 为 C 的长度。由于 $\dfrac{LM}{\pi d^3}$ 是与 Δz 无关的常数，所以当 $\Delta z\to0$ 时，就有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\,\xi,\ \forall z\in D。$$

□

推论 3.2 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。则对任何 $n\ge1,\ z\in D,\ f^{(n)}(z)$ 在 D 内解析。

证明： 对任意 $z_0\in D$, 存在一个圆盘 $|z-z_0|\le r$ 使其完全含在 D 内。于是由定理 3.8,

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z,\ n=1,2,\cdots。$$

由 z_0 的任意性，我们可以推出结论。 □

例 3.9 计算 $\displaystyle\oint_C\frac{\sin z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}\,z$, 其中 C 是 $\mathbf{C}$ 内任何一条包含 i 的正向简单闭曲线。

解: 由于 $\sin z$ 在 $\mathbf{C}$ 内解析，故由定理 3.8 得

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{\sin z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}\,z=&\frac{2\pi\mathrm{i}}{(3-1)!}(\sin z)^{(3-1)}|_{z=\mathrm{i}}\\=&\pi\mathrm{i}\,(-\sin z)=-(\pi\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\\=&\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})。\end{aligned}$$

三、高阶求导公式的应用

在这里，我们以举例的方式来证明一些《复变函数》中的重要定理。

例 3.10 (摩瑞拉 (Morera) 定理) 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续。则 $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件是：对 D 中任何一条正向简单闭曲线 C, 都有 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明： 由柯西积分定理可知，当 $f(z)$ 在 D 内解析时，对 D 内的任何正向简单闭曲线 C 都有 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

反之，根据定理 3.5, $F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z}f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi,\ z,z_0\in D$ 有定义而且 $F'(z)=f(z),\forall z\in D$。于是由推论 3.2, $f(z)$ 在 D 内解析。 □

例 3.11（刘维尔 (Liouville) 定理）设 $f(z)$ 在全平面 $\mathbf{C}$ 上解析而且有界。则 $f(z)$ 必为常数。

证明： 要证明 $f(z)$ 为常数，我们只须证明 $f'(z) \equiv 0$ 即可。

现任取一点 $a \in \mathbf{C}$ 并以 a 为圆心以任意大的正数 R 为半径作正向圆周 $C: |z-a| = R$。设 $M = \max\limits_{z\in\mathbf{C}} |f(z)|$。则由定理 3.8,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} \,\mathrm{d}\, z,$$

所以

$$|f'(a)| \le \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^2} \,\mathrm{d}\, s \le \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M}{R^2} \,\mathrm{d}\, s = \frac{M}{R}。$$

令 $R \to +\infty$, 则得 $f'(a) = 0$。因 a 是 $\mathbf{C}$ 中的任意数，故 $f(z) \equiv$ 常数。 □

利用刘维尔定理，我们可以证明下面的代数基本定理。

例 3.12 设 $P_n(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \ne 0$ 是 C 上的 n 次多项式。则 $P_n(z)$ 至少有一个零点。

证明：（反证法）. 设 $P_n(z) \ne 0, \forall z \in \mathbf{C}$。令 $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$。由于

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \frac{1}{a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n}},$$

故 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$。于是存在 $M > 0$ 使得当 $|z| > M$ 时， $|f(z)| < 1$。由于 $f(z)$ 在 $|z| \le M$ 上连续，故存在 $M_1 > 0$ 使得 $|f(z)| \le M_1, \forall |z| \le M$。从而由刘维尔定理得到， $f(z) \equiv$ 常数，即 $P_n(z) \equiv$ 常数，这与 $a_0 \ne 0$ 矛盾。所以， $P_n(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 内至少有一个零点。 □

§3.5 调 和 函 数

我们已经知道，满足拉普拉斯 (Laplace) 方程的二元可微函数称为调和函数。调和函数在数学及物理学中有着及其重要的应用。在这一章中，我们主要讨论解析函数与调和函数的关系，并给出用调和函数来表示解析函数的公式。

一、调和函数与解析函数的关系

1. 调和函数的概念

设函数 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ 在区域 D 内解析，根据第二章的定理 2.2, 它在 D 内必满足 C–R 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。 \tag{3.8}$$

此外，根据第三章的定理 3.8, 我们知道区域内解析的函数存在任意高阶导数，由此可以推出：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 在区域 D 内就有连续偏导数。将式 (3.8) 中的第一式再对 x 求偏导数及第二式再对 y 求偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}。$$

根据偏导数的连续性，由上面二式可得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。\tag{3.9}$$

同样对 (3.8) 中第一式再对 y 求偏导数，第二式再对 x 求偏导数，可得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u^2}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}。$$

利用二阶偏导数的连续性及上面二式得到

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2}+\frac{\partial v^2}{\partial y^2}=0。\tag{3.10}$$

上面的论述说明了解析函数的实部与虚部同时满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0。\tag{3.11}$$

根据上面的讨论，由 (3.9) 式及 (3.10) 式可以得到调和函数与解析函数的关系，我们叙述如下：

命题 3.3 任何一个在区域 D 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, 它的实部与虚部都是调和函数。

这个命题可以使我们利用解析函数来研究调和函数。并且我们称 u 和 v 互为共轭调和函数。

2. 求实部已知的解析函数

根据命题 3.3, 我们知道区域 D 内解析函数的实部与虚部都是调和函数。但是反过来，对于任何两个在区域 D 内的调和函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$, 复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 却不一定是解析的。因为 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 不一定满足 C–R 条件。然而如果已知一个调和函数 $u(x,y)$, 那么就可以利用 C–R 条件求得它的共轭调和函数 $v(x,y)$, 从而构成一个解析函数 $u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$。

例 3.13 已知 $u(x,y)=x^2-y^2-2xy$, 求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 及解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$。

解: (解一) 显然，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y-2x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,$$

$u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程，则 $u(x,y)$ 是调和函数。

由于

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2x \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y \tag{3.13}$$

在 (3.12) 式中对 x 积分 (y 作为参变量), 得到

$$v = \int (2y + 2x)\,\mathrm{d}\,x = 2xy + x^2 + g(y),$$

其中 $g(y)$ 是任意函数。将上式代入 (3.13) 式可得

$$2x + g'(y) = 2x - 2y,$$

即 $g'(y) = -2y$。于是可得 $g(y) = -y^2 + C$。因此

$$v(x,y) = 2xy + x^2 - y^2 + C。$$

从而得到解析函数

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + \mathrm{i}\,(2xy + x^2 - y^2 + C)。$$

(解二) 因为

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= 2x - 2y - \mathrm{i}\,(-2y - 2x) = 2(1+\mathrm{i})z, \end{aligned}$$

所以

$$f(z) = (1+\mathrm{i})z^2 + C。$$

因为 $u(x,y)$ 是 $f(z)$ 的实部，所以 C 必须是纯虚数，从而与方法一的结果一致。

例 3.14 设某一解析函数 $f(z)$ 的实部是已知的调和函数 $u(x,y)$, 并且 $u(x,y)$ 中的 x, y 用复数 ξ, η 代替时， $u(\xi,\eta)$ 有意义。证明 $f(z)$ 可用下式表示:

$$f(z) = 2u\Big(\frac{z}{2}\,,\,\frac{z}{2\,\mathrm{i}}\Big) - u(0,0)。 \tag{3.14}$$

证明：由于 $z = x + \mathrm{i}\,y$, 则

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad y = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \bar{z})。$$

而 $f(z) = u + \mathrm{i}\,v, \overline{f(z)} = u - \mathrm{i}\,v$。显然 $\overline{f(z)}$ 也可看作是 z 与 $\bar{z}$ 的二元函数。于是由链式法则可得 $\overline{f(z)}$ 对 z 的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} - \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= 0。 \end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial z}=0$, 故 $\overline{f(z)}$ 与 z 无关，仅是 $\bar{z}$ 的函数，记为 $\overline{f}(\bar{z})$。于是

$$2u(x,y)=f(x+\mathrm{i}\,y)+\overline{f}(x-\mathrm{i}\,y)。$$

用 $x=\dfrac{z}{2}, y=\dfrac{z}{2\mathrm{i}}$ 代入上式可得

$$2u\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\Big)=f(z)+\overline{f}(0),$$

上式中用 0 代替 z, 得

$$2u(0,0)=f(0)+\overline{f}(0)$$

于是

$$2u\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\Big)-u(0,0)=f(z)+\frac{1}{2}\Big[\overline{f}(0)-f(0)\Big],$$

因此除了可能相差一个纯虚数外，所求函数为

$$f(z)=2u\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\Big)-u(0,0)。$$

□

比如，根据上例，若解析函数 $f(z)$ 的实部为 $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$, 则 $u(0,0)=0$,

$$\begin{aligned}f(z)=2u\Big(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\Big)&=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{z}{2\mathrm{i}}}\\&=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}\\&=\tan z。\end{aligned}$$

二、解析函数的一种构造方法

命题 3.3 说明了解析函数的实部、虚部构成共轭调和函数。现在，我们要反过来问：已知一个调和函数 u 是否可以找到一个共轭调和函数 v, 使 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v$ 成为解析函数？上述的 3 个例子给出了这个问题正面回答的可能性，但是否一定是正确的呢？请看下面的例子。

例 3.15 *设 $G=\mathbf{C}\backslash\{0\}$, $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)^{1/2}$。则 $u(x,y)$ 是 G 内的调和函数。现设在 G 内存在 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$, 即 $v(x,y)$ 满足:*

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}。$$

于是由定理 2.1, $f(z)=u+\mathrm{i}\,v$ 在 G 内解析，而且由上式，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{z},\quad z=x+\mathrm{i}\,y\neq 0。\tag{3.15}$$

由于在去掉原点及负实轴的区域 G_1 内，$\ln z$ 解析，而且 G_1 又是单连通的，故由 (3.15) 式及定理 3.6 得到 $f(z)=\ln z+C, \forall z\in G_1$，其中 C 是一个复常数。由于 $f(z)$ 在 G 内连续，而 $\ln z$ 在去掉原点的负实轴上不连续，所以就得到矛盾。这个矛盾说明，在 G 内上述猜测是不成立的。

尽管如此，我们还是有下面的结果：

命题 3.4 设 $u(x,y)$ 是 $|z-z_0|<R$ (R 可取 $+\infty$) 内的调和函数，则存在 $|z-z_0|<R$ 内的调和函数 $v(x,y)$, 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为 $|z-z_0|<R$ 内的解析函数。

证明： 我们用 C–R 方程在 $|z-z_0|<R$ 内求一个调和函数 $v(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

我们首先令

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}\,t+\phi(x),\tag{3.16}$$

而 $\phi(x)$ 是一个待定的函数。

对 (3.16) 式两边同时关于 x 求偏导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=\int_0^y\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\,t+\phi'(x)\\&=-\int_0^y\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\,t+\phi'(x)\\&=-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}+\phi'(x)\\&=\frac{\partial v}{\partial x}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,0)}+\phi'(x)。\end{aligned}$$

于是 $\phi'(x)=-\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,0)}$，从而由 (3.16) 式得到

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}\,t-\int_0^x\frac{\partial u(x,0)}{\partial s}\,\mathrm{d}\,s。$$

容易验证，上述的 $v(x,y)$ 是 $|z-z_0|<R$ 内的调和函数，而且 $u(x,y), v(x,y)$ 满足 C–R 方程。 □

在上述命题的证明过程中，主要用到了带参数积分的求偏导数的方法，其具体原理可参见附录一。

三、施瓦兹公式与普阿松公式 *

对于解析函数，我们有柯西积分公式 (定理 3.8), 利用这一公式，可以通过解析函数在区域 D 边界上的柯西积分求出函数在区域 D 内任一点处的值。而对于调和函数，我们也有类似的公式 — 普阿松 (Poisson) 积分公式。并且可以通过调和函数在边界上的值确定它所对应的解析函数及其共轭调和函数。

定理 3.10（施瓦兹公式）设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 $|z|=\rho$ 上连续，在 $|z|<\rho$ 内解析，则

$$f(z)=\mathrm{i}\,\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\cdot\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}+z}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z}\,\mathrm{d}\,\phi,\quad |z|<\rho \tag{3.17}$$

其中 β_0 为实常数。

证明： 由于 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内解析，则对圆 $|z|<\rho$ 内任一点 z 有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\chi|=\rho}\frac{f(\chi)}{\chi-z}\,\mathrm{d}\,\chi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z}\,\mathrm{i}\,\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}\,\mathrm{d}\,\phi\end{aligned}$$

即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)+\mathrm{i}\,v(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\right]\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z}\,\mathrm{d}\,\phi \tag{3.18}$$

令 $z^*=\dfrac{\rho^2}{\bar{z}}$，显然 z^* 在圆外，于是由柯西积分定理得：

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\chi|=\rho}\frac{f(\chi)}{\chi-z^*}\,\mathrm{d}\,\chi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\chi|=\rho}\frac{f(\chi)}{\chi}\,\frac{\bar{z}\,\chi}{\chi\,\bar{z}-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\chi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\chi|=\rho}\frac{f(\chi)}{\chi}\,\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\chi}}\,\mathrm{d}\,\chi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}}\,\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\phi}}\,\mathrm{i}\,\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}\,\mathrm{d}\,\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi})\,\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\phi}}\,\mathrm{d}\,\phi\end{aligned}$$

即

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)+\mathrm{i}\,v(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\right]\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\phi}}\,\mathrm{d}\,\phi$$

上式两端取共轭后得

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)-i\,v(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\right]\frac{-z}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z}\,\mathrm{d}\,\phi \tag{3.19}$$

将式 (3.18) 与 (3.19) 两式相减，得到

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\,\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}+z}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}-z}\,\mathrm{d}\,\phi\\&+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\,\mathrm{d}\,\phi\end{aligned}$$

其中令 $\beta_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}v(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)\,\mathrm{d}\,\phi$，显然 β_0 为实数。由此可得定理成立。 □

将公式 (3.17) 两边取实部，并以 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代入，于是得到：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+z}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}+r}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}-r}\right)\\
&=\mathrm{Re}\left(\frac{\rho\cos(\phi-\theta)+r+\mathrm{i}\,\rho\sin(\phi-\theta)}{\rho\cos(\phi-\theta)-r+\mathrm{i}\,\rho\sin(\phi-\theta)}\right)\\
&=\mathrm{Re}\left(\frac{[\rho\cos(\phi-\theta)+r+\mathrm{i}\,\rho\sin(\phi-\theta)][\rho\cos(\phi-\theta)-r-\mathrm{i}\,\rho\sin(\phi-\theta)]}{[\rho\cos(\phi-\theta)-r]^2+\rho^2\sin^2(\phi-\theta)}\right)\\
&=\frac{[\rho\cos(\phi-\theta)+r][\rho\cos(\phi-\theta)-r]+\rho^2\sin^2(\phi-\theta)}{\rho^2-2\rho r\cos(\phi-\theta)+r^2}\\
&=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\rho-\theta)+r^2}。
\end{aligned}$$

由此可得到普阿松公式

定理 3.11（普阿松公式）设 $u(z)=u(x,y)$ 在闭圆 $|z|\le\rho\ (0<\rho<+\infty)$ 上连续，在开圆 $|z|<\rho$ 内为调和函数，则对圆内任一点 z，记 $z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\le r\le\rho$, $0\le\theta<2\pi$, 有

$$u(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\,\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2r\,\rho\,\cos(\phi-\theta)+r^2}\,\mathrm{d}\phi。$$

习 题 三

1. 计算积分 $\displaystyle\int_C z^2\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是

    (1) 原点到 $(2+\mathrm{i})$ 的直线段；

    (2) 原点到 2 再到 $(2+\mathrm{i})$ 的折线；

    (3) 原点到 i 再沿水平到 $(2+\mathrm{i})$ 的折线。

2. 计算积分 $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为

    (1) 从 $(1,0)$ 点沿单位圆周，顺时针方向走到 $(0,1)$ 点的半圆周；

    (2) 从点 z_1 到点 z_2 的直线段。

3. 求下列积分，C 是正向单位圆周：

    (1) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z-3}$;　(2) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+4}$;

    (3) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;　(4) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{3z-1}$。

4. 计算下列积分：

    (1) $\displaystyle\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 z\,\mathrm{d}z$;　(2) $\displaystyle\int_0^1 z\cos z\,\mathrm{d}z$;

    (3) $\displaystyle\int_0^{\pi\mathrm{i}}(z-1)\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$;　(4) $\displaystyle\int_{1+\mathrm{i}}^{1-\mathrm{i}}\mathrm{e}^z\sin z\,\mathrm{d}z$。

5. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z\sin z}{2z-\pi}\,\mathrm{d}\,z$;　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-3z+1}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}\,z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}\,z$;　(4) $\displaystyle\int_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}\,z$。

其中，$C_1: |z|=2$ 为正向；$C_2: |z|=3$ 为负向.

6. 设

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=2}\frac{\xi\mathrm{e}^{\xi}}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi,\quad |z|\neq 2。$$

求 $f(0)$, $f'(0)$ 及 $f(3)$, $f'(3)$。

7. 已知函数 $u(x,y)$, 求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ ：

(1) $u(x,y)=y^3-3x^2y,\quad f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$;

(2) $u(x,y)=2(x-1)y,\quad f(2)=-\mathrm{i}$;

(3) $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

(4) $u(x,y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$。

8. 证明函数 $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但函数

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$$

不是解析函数。

9. 设 $v(x,y)=\mathrm{e}^{px}\sin y$, 求 p 的值使 $v(x,y)$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v$。

10. 求双曲线族 $y^2-x^2=C$ 的正交曲线族。

11*. 设 $0\le r<1$, n 为正整数，试求积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\phi\;\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-\theta)+r^2}\,\mathrm{d}\,\phi$$

的值。

12. 设区域 D 为右半平面，z 为 D 内的圆周 $|z|=1$ 上的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连接原点与 z, 证明：

$$\mathrm{Re}\left[\int_0^z\frac{\mathrm{d}\,\xi}{1+\xi^2}\right]=\frac{\pi}{4}。$$

13. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。试证明：

(1) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$;

(2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(1+|f(z)|^2)=\dfrac{4|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}$。

14. 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析且 $f(0)=1$, 试求

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z。$$

15. 利用上题的结果证明：若 $f(z)$ 满足上题的条件且 $\mathrm{Re}\{f(z)\}\ge 0$, 则 $|\mathrm{Re}\,f'(0)|\le 2$。

16. 设 $u(x,y)$ 在 $|z|=1$ 上连续，在 $|z|<1$ 内调和，证明：

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta,\quad 0<r<1。$$

17. 证明：如果复平面上的调和函数 $u(z)$ 是有界的，那么 $u(z)$ 恒为常数。

18. 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析．试证明：对任意 $|z|<1$，有

$$(1-|z|^2)f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\xi=1}f(\xi)\frac{1-\bar{z}\xi}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi,$$

$$(1-|z|^2)|f(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta。$$

19. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v$ 在 C: $|z|=1$ 上连续，在 D: $|z|<1$ 内解析。证明：

$$\frac{1}{2}\oint_C u\,\mathrm{d}\,v-v\,\mathrm{d}\,u=\iint_{\overline{D}}|f'(z)|^2\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\ \ (z=x+\mathrm{i}\,y)。$$

20*. 设 $\omega=f(z)=u+\mathrm{i}\,v$ 在 $|z|=1$ 上连续，在 $|z|<1$ 内解析，证明：

$$f'(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\cos\phi,\sin\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\phi}\,\mathrm{d}\,\phi。$$

21. 设 $f(z)$ 在平面 $\mathbf{C}$ 内解析，且存在自然数 k 及正数 M，使得 $|f(z)|\le M|z|^k$。证明：$f(z)$ 是一个次数不超过 k 的多项式 (提示：利用高阶求导公式证明，$f^{(n)}(z)=0$ 对 $\forall\, z>k$ 成立)。

第四章 无 穷 级 数

在《高等数学》或《数学分析》中，通过函数项级数和幂级数我们可以研究函数的性质，可以用来求常微分方程的解，也可以用来求函数的近似值。在复变函数中，级数同样也是研究解析函数的重要工具。在这一章中，我们将给出解析函数的泰勒展开式及洛朗展开式，并利用解析函数的泰勒展开式来导出解析函数的零点孤立性和最大模原理等一些重要的性质。

§4.1 函数项级数

在第一章中，我们已经对复数项级数作了一些简单的介绍，下面我们来讨论复变函数项级数收敛性问题。

设复变函数列 $\{f_n(z)\}_1^\infty$ 定义在 $\mathbf{C}$ 中的子集 E 上，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为函数项级数。令 $D = \{z \in E \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)\text{收敛}\}$, D 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛范围。若 $D \neq \phi$, 则在 D 上有一个函数 $f(z)$, 使得 $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$。$f(z)$ 就称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的和函数。

上述情形也可借助 $\epsilon - N$ 的方式描述为：

对 $\forall \epsilon > 0$ 及固定点 $z \in D$, 存在 $N = N(\epsilon, z) \in \mathbf{N}$, 使得当 $n > N$ 时，

$$\Big|f(z) - \sum_{j=1}^{n} f_j(z)\Big| < \epsilon。$$

一般来说，上述的 N 不仅依赖于 ϵ 而且还依赖于 $z \in D$。若 N 仅依赖于 ϵ 而与 z 无关，那就是所谓的一致收敛的概念。

定义 4.1 若对 $\forall \epsilon > 0$ 存在一个与 z 无关的自然数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时，对一切 $z \in D$ 有

$$\Big|f(z) - \sum_{j=1}^{n} f_j(z)\Big| < \epsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上一致收敛于 $f(z)$。

定义 4.2 设复变函数列 $\{f_n(z)\}_1^\infty$ 在区域 D 内有定义而且 D 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛范围。如果在 D 内的任何一个闭子区域上 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛。

利用与《数学分析》中相同的方法，我们可以证明下面的结论：

命题 4.1 设 $\{f_n(z)\}_1^\infty$ 是在区域（或闭区域）D 上有定义而且存在正数列 $\{a_n\}_1^\infty$ 使得 $|f_n(z)| \le a_n$, $n = 1, 2, \cdots$，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上一致收敛。

命题 4.2 设复变函数列 $\{f_n(z)\}_1^\infty$ 在区域 D 内有定义且在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$。

(1) 若 $f_n(z), n = 1, 2, \cdots$，在 D 内连续，则 $f(z)$ 在 D 内连续；

(2) 设 C 为 D 内任何一条正向简单曲线，而且 $f_n(z), n = 1, 2, \cdots$ 在 C 上连续，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

由此，我们得到下面的维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理：

定理 4.1 设复变函数列 $\{f_n(z)\}_1^\infty$ 在单连通区域 D 内解析并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ 在区域 D 中内闭一致收敛。则

(1) $f(z)$ 在 D 内解析；

(2) $f^{(p)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z), p = 1, 2, \cdots$。

证明：(1) 由命题 4.2, $f(z)$ 在 D 内连续。设 C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线。由于 $\oint_C f_n(z)\,dz = 0, n = 1, 2, \cdots$，及由命题 4.2 (2),

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

故 $\oint_C f(z)\,dz = 0$。从而由摩瑞拉定理 (见例 3.10) 可知，$f(z)$ 在 D 内解析。

(2) 设 z 为 D 内任一点，在 D 内作一正向简单闭曲线 C 使 z 在 C 的内部。由高阶求导公式

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\,\mathrm{d}\xi, \quad f_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\,\mathrm{d}\xi,$$

$n,\ p = 1, 2, \cdots$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} \text{ 在 } C \text{ 上一致收敛于 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}},$$

我们得到

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z),\ p = 1, 2, \cdots$$

□

§4.2 幂 级 数

在 §4.1 中，如果我们取 $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, 其中 $\{a_n\}_1^\infty$ 为复常数列， $z_0 \in \mathbf{C}$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 就称为幂级数。幂级数在解析函数性质的研究及函数值的近似计算中都有十分重要的应用。

一、幂级数的收敛半径及收敛圆

为了讨论的方便，我们总是取幂级数的标准形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。我们首先研究 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛性。对此，我们有下面的阿贝尔 (Abel) 定理。

定理 4.2 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = z_1(\neq 0)$ 处收敛，则此级数在 $|z| < |z_1|$ 内绝对收敛；若在 z_1 处发散，则在 $|z| > |z_1|$ 内， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散。

证明： 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$。从而存在常数 $M > 0$, 使得对所有的 n, 都有 $|a_n z_1^n| \le M$。又

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n|\left|\frac{z}{z_1}\right|^n, \ n \ge 1$$

而且当 $|z| < |z_1|$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ 收敛，所以当 $|z| < |z_1|$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛。

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_1 处发散。若有一点 z_2 使得当 $|z_2| > |z_1|$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ 收敛。则由前一半的结论可知， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ 收敛，但这与假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散矛盾。于是， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| > |z_1|$ 内发散。 □

注意到，由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_1 处收敛可推出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < |z_1|$ 内内闭一致收敛。事实上，设 $|z| \le r < |z_1|$, 则由

$$|a_n z^n| \le |a_n r^n| \le M\left|\frac{r}{z_1}\right|^n$$

可知， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 一致收敛。

根据定理 4.2, 我们对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛范围可确定如下：

(1) 对正实轴上所有的点 x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都收敛。这时，对 $\forall z \in \mathbf{C}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 都绝对收敛；

(2) 对正实轴上除了 0 外，所有的点 x 都使 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。这时，除了 0 点外，对所有的点 z, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 都发散；

(3) 存在正实轴上的点 $x_1 > 0$ 及 $x_2 > 0$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = x_1$ 处收敛，在 $z = x_2$ 处发散。则使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛的点 z 必满足 $|z| < x_2$。在此情况下，由阿贝尔定理，我

们可取到一个正数 R 使得对 $|z|<R$ 的 z, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛而对 $|z|>R$ 的 z, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散。

这个 R 就称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径，而 $|z|<R$ 就称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛圆。对于情形 (1) 及 (2), 我们可以分别设为 $R=\infty$ 及 $R=0$。

采用与《高等数学》或《数学分析》相同的方法，我们可以求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径如下：

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 存在，则 $R=\dfrac{1}{L}$ 。当 $L=\infty$ 时， $R=0$; $L=0$ 时， $R=\infty$。

对于 $|z|=R$ 上的点， $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的敛散性一般较难判断。

例 4.1 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n^2}$ 的收敛半径及收敛范围。

解: 由于

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,$$

故 $R=1$, 即此幂级数的收敛半径为 1, 从而它的收敛域为 $|z-1|<1$。又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数在 $|z-1|\le 1$ 上收敛，即它的收敛范围是 $|z-1|\le 1$。

根据定理 4.1 及幂级数收敛圆的性质，我们有下面的结论：

命题 4.3 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2。

(1) $f(z), g(z)$ 分别在 $|z|<R_1$ 及 $|z|<R_2$ 内解析且

$$\lambda_1 f(z)+\lambda_2 g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n)z^n,\ |z|<\min(R_1,R_2)$$

其中， λ_1,λ_2 是复常数;

(2) $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $|z|<R_1$;

(3) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\int_C z^{n+1}\,\mathrm{d}z$, $|z|<R_1$, 其中 C 为 $|z|<R_1$ 中的一条简单曲线;

(4) 设 $h(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|h(z)|<R_1, z\in D$。则 $f(h(z))$ 在 D 内解析，且 $f(h(z))=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h^n(z)$, $z\in D$。

§4.3 解析函数的泰勒展开

一、解析函数的泰勒展开

在高等数学中，我们已经知道若 $f(z)$ 在区间 $(-R,R)$ 中无限次可微，而且存在 $M>0$，使得 $|f^{(n)}(x)|\le M,\ \forall n\ge 1,\ x\in(-R,R)$，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

这就是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式。这种展开式可用于函数 $f(x)$ 的近似计算及近似值的误差估计。

在复变函数中，我们当然也希望复变函数具有与实变量的情形相同的结果。但由于幂级数的和函数在其收敛域中是解析函数，因此我们必须考虑解析函数的展开问题。

定理 4.3 *设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。则对任何 $z_0\in D$ 及使得 $U(z_0,\delta)\in D$ 的 $\delta>0$ 都有*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<\delta。\tag{4.1}$$

证明： 对于满足 $|z-z_0|<\delta$ 的 z，令 $r=|z-z_0|<\delta$。取 $\delta_1\in(r,\delta)$。则正向圆周 $C:|\xi-z_0|=\delta_1$ 在 $U(z_0,\delta)$ 内且 z 在 C 的内部 (图 4–1)。

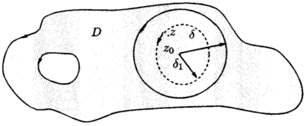


图 4–1

于是由柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi。$$

当 $|z-z_0|=r,\ |\xi-z_0|=\delta_1$ 时，$\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=\dfrac{r}{\delta_1}<1$，故

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{(z-z_0)}{(\xi-z_0)^2}+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}+\cdots$$

在 C 上关于 ξ 一致收敛。从而

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\xi \right) (z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n 。
\end{aligned}
$$

在这个邻域 $U(z_0,\delta)$ 内，上述的幂级数是唯一的，即若

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ z \in U(z_0,\delta),
$$

则

$$
a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n = 0,\ 1,\ \cdots
$$

由于幂级数在收敛圆内可逐项求导，所以对

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ |z-z_0| < \delta
$$

两边同时求 n 次导数后将 $z = z_0$ 代入，得到

$$
n! a_n = \frac{f^{(n)}(z_0) n!}{n}!,\ n = 0, 1, \cdots,
$$

即

$$
a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n = 0, 1, \cdots
$$

□

(4.1) 式称为 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的泰勒 (Taylor) 展开式或泰勒级数，系数 $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 称为泰勒系数。

由这个定理，我们可以得到下面的推论：

推论 4.1 *设 $f(z)$ 在区域 D 内有定义。则 $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件是 $f(z)$ 在 D 内每一点都可展开为泰勒级数。*

推论 4.2 *设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。对 D 内任何一点 z_0，设 d 是 z_0 到 D 的边界 ∂D 各点的距离中的最短距离。则*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n
$$

的收敛半径就是 d。

事实上，从定理 4.3 的证明来看，定理证明中的 δ 具有很大的伸缩性。为了能够扩大幂级数的收敛半径，我们需要估计 z_0 到 ∂D 上各点的距离，而这个 d 正是我们所要的。因为此时正好 $\{z \mid |z-z_0| < d\}$ 落在 D 内而且使得 $\{z \mid |z-z_0| < \delta\} \subset D$ 的 δ 的最大值就是 d。

推论 4.3 *设 $f(z)$ 在全平面 $\mathbf{C}$ 内除了有有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析。设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则泰勒级数*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{4.2}
$$

的收敛半径 $R=\min\limits_{1\le j\le k}|z_0-z_j|$。

证明： 在 (4.2) 式的收敛域内，$f(z)$ 是解析的。所以，$z_1,z_2,\cdots,z_k$ 不能在它的收敛域内。于是，根据定理 4.3 及收敛半径的定义，我们可将 (4.2) 式的收敛域扩张到最大为 $|z-z_0|<R$。 □

二、一些初等函数的泰勒展开

应用解析函数的泰勒展开式再结合幂级数逐项求导及求积分的公式或一些代数运算技巧，我们可以求出一些常见的初等函数的泰勒展开式。

(1) $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 $\mathbf{C}$ 内解析，$f^{(n)}(0)=1$。所以

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\quad |z|<+\infty。$$

(2) $f(z)=\sin z$ 在 $\mathbf{C}$ 内解析，$f^{(n)}(z)=\sin(z+\dfrac{n\pi}{2})$。所以

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad |z|<+\infty。$$

故

$$\cos z=(\sin z)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<+\infty。$$

我们还可以利用 e^z 的泰勒展开式求得 $\sin z$ 及 $\cos z$ 分别为

$$\begin{aligned}\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z|<+\infty,\\ \cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}+\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty。\end{aligned}$$

(3) $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$f(0)=0$,

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n,\quad |z|<1。$$

故

$$f(z)=\int_0^z f'(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^nz^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1。$$

(4) $f(z)=(1+z)^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}(1+z)}$ (α 是复常数) 是一个多值函数，在 $|z|<1$ 内可分解为单值解析分支，取其一个分支为

$$f(z)=(1+z)^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+z)},$$

我们来求 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

用复合函数求导法则得到：

$$\begin{aligned} f'(z) &= \alpha e^{\alpha\ln(1+z)}\frac{1}{1+z} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+z)}, \\ f^{(n)}(z) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln(1+z)}, \end{aligned}$$

于是有， $f(0)=1, f'(0)=\alpha,\cdots,f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$。所以 $(1+z)^\alpha$ 的这个单值解析分支在 $|z|<1$ 内的展开式为

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots。$$

§4.4 洛 朗 级 数

一、洛朗级数的概念

我们在讨论函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在环形区域 $0<|z-1|<1$ 内的级数展开时，可将 $f(z)$ 写成下面的形式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-(z-1)^{-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n。\tag{4.3}$$

从表示式 (4.3) 来看，其中既含有 $(z-1)$ 的正幂次项又含有 $(z-1)^{-1}$ 的负幂次项。这种形式的级数称为洛朗 (Laurent) 级数。一般地，我们可以考虑标准洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$。这只不过是一个形式的定义，具体来说，我们是将 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ 定义为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{4.4}$$

也就是说， (4.4) 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 都收敛。

在 (4.4) 式中， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径设为 R, 而 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n$ 通过代换 $z=\dfrac{1}{\xi}$ 可化为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}\xi^n$。这样，我们可以设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}\xi^n$ 的收敛半径为 r_1, 于是 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n$ 的收敛域为 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<r_1$ 即 $|z|>\dfrac{1}{r_1}=r$。从而 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $r<|z|<R$。

二、解析函数的洛朗展开

(4.4) 式仅给出了解析函数可以写成洛朗级数的一个特例。一般地，我们有下面的定理:

定理 4.4 设 $f(z)$ 在区域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析。则 $f(z)$ 在 $r<|z-z_0|<R$ 内可以展开成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad r<|z-z_0|<R,$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z,\ n=0,\pm1,\cdots \tag{4.5}$$

而 C 为 $r<|z-z_0|<R$ 中任何一条包含 z_0 的正向简单闭曲线。

我们要特别注意 (4.5) 式中 a_n 的表达式。一般来说，$\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 C 的内部不一定是解析函数，所以当 $n\geq 0$ 时，未必就有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$。

证明： 对于任何满足 $r<|z-z_0|<R$ 的 z，作两个正向圆周 $\Gamma_1:|\xi-z_0|=r_1$，$\Gamma_2:|\xi-z_0|=r_2$ 使得 z 在圆环域 $r_1<|z-z_0|<r_2$ 内，C 在 $r_1\leq|z-z_0|\leq r_2$ 内 (图 4–2) 。由于

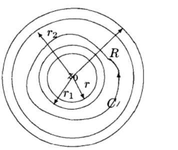


图 4–2

$f(z)$ 在 Γ_1,Γ_2 上连续，在 $r_1<|z-z_0|<r_2$ 内解析，故由柯西积分公式得到：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi。$$

当 $\xi\in\Gamma_2$ 时，$\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r_2}<1$ 故

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

在 Γ_2 上一致收敛。于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\xi。$$

当 $\xi\in\Gamma_1$ 时，$\left|\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{r_1}{|z-z_0|}<1$, 故

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{-1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

在 Γ_1 上一致收敛。从而，

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\,\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} \mathrm{d}\,\xi。$$

由复合闭路定理，

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\,\xi = \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\,\xi,\ n = 1, 2, \cdots,$$

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\,\xi = \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\,\xi,\ n = 0, 1, \cdots,$$

所以，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad r < |z - z_0| < R$$

其中 a_n 为 (4.5) 式中的表达式。

我们还可以证明，在 $r < |z - z_0| < R$ 内，洛朗展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

是唯一的。事实上，若在 $r < |z - z_0| < R$ 内有 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$，则

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\,z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_C (z - z_0)^{n-m-1} \mathrm{d}\,z。 \tag{4.6}$$

注意到，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C (z - z_0)^{n-m-1} \mathrm{d}\,z = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m, \end{cases}$$

故由 (4.6) 式得到 $a_m = b_m,\ m = 0, \pm 1, \cdots$ □

定理 4.4 给出了圆环上解析函数可以洛朗展开的结论，但对展开式中的系数 a_n 计算一般来说却是很困难的。所以，在求解析函数的洛朗展开式时，我们往往采用一些间接的方法如用某些已知解析函数的泰勒展开式来求指定函数的洛朗展开式。

三、例题

例 4.2 求 $f(z) = \sin z + \sin \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开式。

解: 由于 $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < +\infty$, 故

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}, \quad 0 < |z| < +\infty。$$

于是，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}, \quad 0 < |z| < +\infty。$$

例 4.3 求函数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在

(1) 圆盘 $|z|<1$ 内;

(2) 圆环 $1<|z|<2$ 内;

(3) 圆环 $2<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式。

解: $f(z)$ 有两个奇点 $z=1$ 及 2。它们将整个复平面 **C** 分成题中的 (1), (2), (3) 这三个区域，正好使 $f(z)$ 在每个区域内都解析 (如图 4-3 所示)。

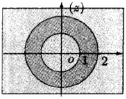


图 4-3

为了求 $f(z)$ 的洛朗展开式，我们首先将 $f(z)$ 分解为部分分式

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2},$$

则 $A=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=-3$, $B=\lim\limits_{z\to2}(z-2)f(z)=5$。于是,

$$f(z)=-\frac{3}{z-1}+\frac{5}{z-2}。$$

(1) 当 $|z|<1$ 时, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, 故

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{3}{1-z}-\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=3\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\\=&\sum_{n=0}^{\infty}(3-\frac{5}{2^{n+1}})z^n。\end{aligned}$$

(2) 当 $1<|z|<2$ 时, $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, 所以

$$\begin{aligned}f(z)=&-\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{3}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\\=&-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}。\end{aligned}$$

(3) 在 $2<|z|<+\infty$ 内, 有 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, 从而

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{5}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot2^n-3}{z^{n+1}}。\end{aligned}$$

以上两个例子可以看出，求解析函数的洛朗展开式往往要借助某些解析函数的泰勒展开式而不是利用定理 4.4 中的系数计算公式。从例 4.3 也可以看出，解析函数在不同点

的环形区域内的洛朗展开式可以是不同的，但在一个给定的环形区域内的洛朗展开式必是唯一的。

§4.5 解析函数的最大模原理 *

一、解析函数的零点的孤立性

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。若有 $a\in D$, 使得 $f(a)=0$, 则 a 称为 $f(z)$ 在 D 内的零点。若 $f^{(k)}(a)=0,\ k=0,1,\cdots,n-1$, 而 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 则 a 称为 $f(z)$ 的 n 级零点。

解析函数 n 级零点的概念是多项式重根的概念的推广。

例 4.4 求 $\sin z-1$ 的全部零点，并指出它们是几级零点？

解: 由 $\sin z-1=0$ 得到

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=1,\ 即\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1=0。$$

从而 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{i})^2=0$, 即得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$。所以， $\sin z-1$ 的全部零点为 $z_k=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\cdots$

由于 $(\sin z-1)'|_{z=z_k}=0,\ (\cos z)'|_{z=z_k}=-1\neq 0$, 故 $z=z_k$ 为 $\sin z-1$ 的二级零点，$k=0,\pm1,\cdots$

设 a 为 $f(z)$ 的 n 级零点。则由 $f(z)$ 的泰勒展开式 (定理 4.2) 可得

$$f(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{n!}(z-a)^m=(z-a)^n h(z),\quad |z-a|<R$$

其中， $h(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析且 $h(a)\neq 0$。

反过来，若在 a 的某个邻域 $U(a,\delta)\subset D$ 内，存在解析函数 $h(z)$ 使得

$$h(a)\neq 0\ 且\ f(z)=(z-a)^n h(z),$$

则利用 $h(z)$ 在 $z=a$ 处的泰勒展开式并由 $f(z)$ 的泰勒展开式的唯一性，我们可以推出 a 必是 $f(z)$ 的 n 级零点。

这样，事实上就证明了：

命题 4.4 *设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。则 a 为 $f(z)$ 的 n 级零点的充要条件是存在 $U(a)\subset D$ 上的解析函数 $h(z)$, 使得 $h(a)\neq 0$ 且 $f(z)=(z-a)^n h(z),\ z\in U(a)$。*

由此，我们可以得到：

推论 4.4 *设 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析。若在 $U(a,R)$ 内存在 $\{z_n\}_1^\infty$, 使得 z_n 收敛于 a (但 $z_n\neq a$) 且 $f(z_n)=0,\ n=1,2,\cdots$。则 $f(z)$ 在 $U(a,R)$ 内恒为零。*

证明：由 $f(z)$ 在 $U(a,R)$ 内解析知 $f(z)$ 在 $U(a,R)$ 内连续，从而 $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=0$。于是，若 $f(z)$ 在 $U(a,R)$ 内不恒为零，我们可设 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 k 级零点，即由命题 4.7, 存在 $U(a,R)$ 内的解析函数 $h(z)$ 使得 $h(a)\neq 0$ 而且 $f(z)=(z-a)^k h(z)$。

由解析函数的保号性，存在一个 $U(a,\delta)$ 使得 $h(z)\neq 0$, $\forall z\in U(a,\delta)$。又 $z_n\to a$, 故当 n 充分大时， $z_n\in U(a,\delta)$, 从而 $h(z_n)\neq 0$, 于是

$$f(z_n)=(z_n-a)^k h(z_n)\neq 0,$$

这与 z_n 是 $f(z)$ 的零点相矛盾。因此， $f(z)\equiv 0$。 □

推论 4.4 是下面的凝聚点定理的特殊情形。

定理 4.5（凝聚点定理）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析， $\{z_n\}_1^\infty\subset D$ 是 $f(z)$ 的零点且存在 $a\in D$ 使得 $z_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, 则 $f(z)$ 在 D 内恒为零。

证明：如果 D 是整个复平面的话，由推论 4.4 可知结论成立 (因为，此时 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的泰勒级数的收敛半径 $R=+\infty$)。因此，在下面的证明中，我们假设 $D\neq\mathbf{C}$, 即 $\partial D\neq\phi$。

设 z 为 D 内任何异于 a 的点。由于 D 是连通的，故在 D 内存在一条折线 L 将 a 与 z 连接起来。设 d 为 L 上各点到 ∂D 各点距离中最短的距离。在 L 上依次取一串点列

$$a=a_0,\, a_1,\cdots,\, a_{n-1},\, a_n=z$$

使相邻两点的距离小于 d。这样， $U(a_j,d)$ 就依次相交且 $a_{j+1}\in U(a_j,d)$, $j=0,1,\cdots,n-1$ (参见图 4–4)。

由推论 4.2 及推论 4.4, 我们得到 $f(z)\equiv 0$, $\forall z\in U(a_0,d)$。然后，对 $U(a_j,d)$, $j=1,\cdots,n-1$ 反复使用推论 4.4, 最终得到 $f(z)=0$。 □

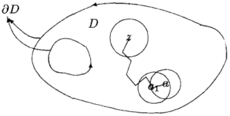


图 4–4

下面的推论给出了两个解析函数相等的条件。

推论 4.5 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内解析且在 D 内的一个无穷子集 E 上的值相等。若存在 $a\in E$ 及 $\{z_n\}_1^\infty\subset E$, 使得 $z_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, 则 $f(z)=g(z)$, $\forall z\in D$。

证明：对 $F(z)=f(z)-g(z)$ 运用定理 4.5 即可。 □

推论 4.5 可用来求解析函数的泰勒展开式或洛朗展开式，请看下面的例子：

例 4.5 求 $\cos z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

解：设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<+\infty。$$

由于当 $z=x\in\mathbf{R}$ 时，$\cos x=f(x)$，故由推论 4.5 得到

$$\cos z=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<+\infty。$$

二、解析函数的最大模原理

我们知道，在闭区域上连续的函数一定有最大、最小值，但这些最大或最小值点不一定能在此区域的边界上取到。对于解析函数来说，情况就不大一样了。下面的定理说明解析函数模的最大值一定在区域的边界上取到。

定理 4.6 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在它的边界 ∂D 上连续。设 ∂D 是正向的简单闭曲线。令 $M=\max\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$。则 $|f(z)|\le M,\ \forall z\in\overline{D}$。若存在 $z_0\in D$ 使得 $|f(z_0)|=M$，则 $f(z)$ 必为常数。

证明：设 n 是任何自然数，$z\in D$。则由柯西积分公式得

$$(f(z))^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial D}\frac{(f(\xi))^n}{\xi-z}\,\mathrm{d}\,\xi。\tag{4.7}$$

设 δ 为 z 到 ∂D 的最短距离，L 为 ∂D 的长度。则由 (4.7) 式，

$$|f(z)|^n\le\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\frac{|f(\xi)|^n}{|\xi-z|}\,\mathrm{d}\,s\le\frac{LM^n}{2\pi\delta}$$

即 $|f(z)|\le\left(\frac{L}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}M$。令 $n\to\infty$，则 $|f(z)|\le M,\forall z\in D$。于是，$|f(z)|\le M,\forall z\in\overline{D}$。

设 $z_0\in D$ 使得 $|f(z_0)|=M$。取 z_0 的一个邻域 $U(z_0,R)$ 使得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad \forall z\in U(z_0,R),$$

任取 $0<r<R$，令 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta\in[0,2\pi]$。由于

$$\begin{aligned}|f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_mr^m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\\&=\sum_{n,m}\bar{a}_na_mr^{n+m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\end{aligned}$$

关于 θ 一致收敛，故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m}a_n\bar{a}_mr^{n+m}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}。\tag{4.8}$$

注意到 $|f(z_0+re^{i\theta})|\le M$, $|a_0|=|f(z_0)|=M$, 故由 (4.8) 式得到 $a_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 即 $f(z)$ 在 $U(a,r)$ 内恒为常数 a_0。于是由定理 4.5 可推出 $f(z)\equiv a_0$, $z\in D$。又 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上连续，故 $f(z)\equiv a_0$, $z\in\bar{D}$。 □

解析函数的最大模原理有许多应用，限于篇幅我们仅举一个例子。

例 4.6 (施瓦兹 (Schwarz) 引理) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|=1$ 上连续而且 $f(0)=0$。令 $M=\max\limits_{|z|=1}|f(z)|$。则 $|f(z)|<M|z|$, $|z|<1$。

证明： 令

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & z\neq 0\\ f'(0) & z=0\end{cases},\quad |z|\le 1。$$

利用 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式，可得 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|=1$ 上连续并且

$$\max_{|z|=1}|g(z)|=\max_{|z|=1}|f(z)|=M。$$

所以由定理 4.6, $|g(z)|<M$, $|z|<1$, 即得 $|f(z)|<M|z|$, $|z|<1$。 □

习 题 四

1. 下列的说法是否正确？为什么？
   (1) 每个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；
   (2) 每个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；
   (3) 每个在 z_0 处连续的函数必可在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数；
   (4) 每个在 z_0 处解析的函数必可在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数。
2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n$ 能否在 $z=1$ 处收敛而在 $z=4$ 处发散？
3. 求下列幂级数的收敛半径：
   (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2(z-1)^n$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$;
   (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln in)^n}z^n$。
4. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 发散，证明：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 1。
5. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R, 而且在收敛圆周上的某一点 z_0 处绝对收敛。试证明该级数在 $|z|\le R$ 上绝对收敛而且一致收敛。
6. 把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：
   (1) $\dfrac{1}{1+z^3}$;　(2) $\sin(1+z^2)$;
   (3) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$;　(4) $e^{z^2}\sin z^2$。

7. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}$，$z_0=2$；　(2) $\dfrac{1}{3-2z}$，$z_0=1+\mathrm{i}$；

(3) $\arctan z$，$z_0=0$；　(4) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$，$z_0=1$。

8. 求下列函数在指定的环型区域内的洛朗展开式：

(1) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z-2)}$，　$1<|z|<2$；

(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，　$0<|z-1|<1$；$1<|z-2|<+\infty$；

(3) $\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$，　在以 0 为中心的圆环域内。

9. 设 k 为实数且 $|k|<1$，证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}。$$

10. 证明函数 $f(z)=\sin\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 的洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ 的系数 c_n 满足等式

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta。$$

11. 设 $0<\theta\le\pi$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)。$$

12. 求下列解析函数的零点，并指出它们的级数：

(1) $\cos z-1$；　(2) $\mathrm{e}^{z}-1$；　(3) $\mathrm{e}^{2z}\sin z$。

13*. 设 $f(z)$ 在平面 $\mathbf{C}$ 内解析。令 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$。证明：$M(r)$ 是关于 r 的递增函数。

14*. 设 $f(z)$ 在平面 $\mathbf{C}$ 内解析，且当 $z=\mathrm{Re}\,z=x$ 时，$f(x)=\sin x$。证明：$f(z)=\sin z$，$\forall z\in\mathbf{C}$。

15*. 设 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上连续，在 $|z|<1$ 内解析，而且 $\max\limits_{|z|=1}|f(z)|=1$。试证明：

$$|f'(z)|\le\frac{1}{1-|z|^2},\quad |z|<1。$$

16*. 设非零函数 $f(z)$ 在单连通区域内解析。设 C 是 D 中的任意一条简单闭曲线。则 $f(z)$ 在 C 所围的区域内的零点的个数最多是有限的。

第五章 积 分 变 换

所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。具体来说，积分变换就是将某函数类中的任意一个函数 $f(t)$, 乘上一个确定的二元函数 $K(s,t)$, 然后再计算其积分，即

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(s) = \int_a^b f(t)\,K(t,s)\,\mathrm{d}\,t = F(s)$$

这样， $f(t)$ 便变成了另一类函数中的一个函数 $F(s)$。于是称 $\mathcal{F}$ 为一个变换， $f(t)$ 称为原函数，而 $F(s) = \mathcal{F}\big(f(t)\big)(s)$ 称为 $f(t)$ 的像函数。

如果对每一个原函数 $f(t)$, 通过变换后，都存在唯一的一个 $F(s)$ 与之对应，则称 $\mathcal{F}$ 是 1—1 的。另一方面，如果存在一个变换 $\mathcal{F}'$, 使得对于每个原函数 $F(s)$ 都存在唯一的像函数 $f(t)$ 与之对应，则 $\mathcal{F}'$ 称为 $\mathcal{F}$ 的逆变换，记为 $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}'$。根据函数变换及逆变换的定义，我们可以得到下面的等式

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}\big(f(t)\big)\Big) = f(t), \qquad \mathcal{F}\Big(\mathcal{F}^{-1}\big(f(s)\big)\Big) = f(s)。$$

在本章中，我们将介绍两种最常用的积分变换：傅立叶 (Fourier) 变换和拉普拉斯 (Laplace) 变换。这两种积分变换可用来求常微分方程的解，积分方程、偏微分方程的解等。因此，它不仅在数学的许多分支中，如自动控制等；而且在其它学科中，如振动力学、电工学、无线电技术等领域中，都有着十分广泛的应用，它们已经成为这些领域中不可缺少的运算工具。

§5.1 拉普拉斯变换

一、拉普拉斯变换的定义

在许多物理现象中，我们往往考虑的是以时间 t 为自变量的函数。比如，在一个有可变电动势且带开关的电路中，假定把接通开关的瞬间作为计算时间的原点，即 $t = 0$, 那么要研究的是电流在 $t > 0$ (接通后) 的变化情况，而对于 $t < 0$ 的情况，就不必考虑了。因此，我们常会遇到仅定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数，或约定当 $t < 0$ 时，函数值仅为 0 的函数。对于这种类型的函数，我们给出它的拉普拉斯变换如下：

定义 5.1 设函数 $f(t)$ 定义在 $[0,+\infty)$ 上，s 是任意复数，如果广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t$$

收敛，则由此积分所确定的函数记为 $F(s)$，并称

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t$$

为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，而 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 称为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换。

求一个函数的拉普拉斯变换有许多方法和技巧。在这里，我们仅举一些利用定义来求拉普拉斯变换的例子。

例 5.1 求函数 $f(t) = \mathrm{e}^{Kt}$ 的拉普拉斯变换，K 是实数。

解： $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{Kt}] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{Kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-K)t}\mathrm{d}\,t,$

由于 $\left|\mathrm{e}^{-(s-K)t}\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(s-K)t}$，故当 $\mathrm{Re}\,s > K$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-(s-K)t}\right|\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\mathrm{Re}\,s - K} < +\infty,$$

即 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-K)t}\mathrm{d}\,t$ 绝对收敛，因此

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{Kt}] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-K)t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{s-K}, \quad (\mathrm{Re}\,s > K)。$$

例 5.2 求正弦函数 $f(t) = \sin Kt$ 的拉普拉斯变换，K 为实数。

解： 由拉普拉斯变换的定义得：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin Kt] &= \int_0^{+\infty} \sin Kt\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kt}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t。\end{aligned}$$

由于 $\left|\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}K)t}\right| = \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,s)t}$，$\left|\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}K)t}\right| = \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,s)t}$；故当 $\mathrm{Re}\,s > 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t, \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t$$

绝对收敛，且

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{s-\mathrm{i}K}, \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}K)t}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{s+\mathrm{i}K},$$

所以

$$\mathcal{L}[\sin Kt] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}K} - \frac{1}{s+\mathrm{i}K}\right) = \frac{K}{s^2+K^2}, \quad \mathrm{Re}\,s > 0。$$

二、拉普拉斯变换的存在性定理

给出了在 $[0,+\infty)$ 上定义的函数 $f(t)$ 后，$\mathcal{L}[f(t)]$ 的存在与否，关键在于

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t$$

是否收敛。这里我们将给出拉普拉斯变换存在的充分条件。

定理 5.1 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，且满足下列条件：

(1) $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任一有限区间上按段连续，间断点最多只有有限个，且都是第一类间断点（即 $f(t)$ 满足狄利克雷（Dirichlet）条件）；

(2) $f(t)$ 是指数增长的函数，即存在两个常数 $M>0$ 及 $C\ge 0$，使

$$\left|f(t)\right| \le M\,\mathrm{e}^{Ct}, \qquad \forall\, t\in[0,+\infty),$$

满足上述不等式的最小正数 C 称为 $f(z)$ 的增长指数。

则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>C$ 上存在且解析。

证明： 事实上，当 $\mathrm{Re}\,s>C$ 时，由 $|f(t)|\le M\,\mathrm{e}^{Ct}$ 知

$$|F(s)| \le \int_0^{+\infty}\left|f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\right|\mathrm{d}\,t \le \int_0^{+\infty} M\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,s-C)t}\mathrm{d}\,t = \frac{M}{\mathrm{Re}\,s-C},$$

因此，$F(s)$ 收敛而且绝对收敛，即 $F(s)$ 存在。

下证：$F(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,s>C$ 上解析，即 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>C$ 内可导。

任取 s，使得 $\mathrm{Re}\,s>C$，令 $\delta=\mathrm{Re}\,s-C$。并取 Δs 为 $|\Delta s|<\dfrac{\delta}{2}$。由于

$$\begin{aligned}\frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta s} &= \frac{1}{\Delta s}\int_0^{+\infty} f(t)\left[\mathrm{e}^{-(s+\Delta s)t}-\mathrm{e}^{-st}\right]\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\frac{\mathrm{e}^{-(\Delta s)t}-1}{\Delta s}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

及 $e^{-(\Delta s)t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}(\Delta s)^n t^n$，所以

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta s}-\int_0^{+\infty}-tf(t)e^{-st}dt\right| \\
&=\left|\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\left(\frac{e^{-(\Delta s)t}-1}{\Delta s}+t\right)dt\right| \\
&\le\int_0^{+\infty}|f(t)|\,|e^{-st}|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\Delta s|^n t^n}{n!}\right)|\Delta s|\,t^2dt \\
&\le|\Delta s|\int_0^{+\infty}|f(t)|\,e^{-\mathrm{Re}(s)t}e^{|\Delta s|\,t}t^2dt \\
&\le|\Delta s|\int_0^{+\infty}M\,e^{(C-\mathrm{Re}\,s)t}e^{|\Delta s|\,t}t^2dt \\
&=|\Delta s|\,M\int_0^{+\infty}e^{-(\delta-|\Delta s|)\,t}t^2dt \\
&<|\Delta s|\,M\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\delta}{2}t}t^2dt。
\end{aligned}$$

由于 $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\delta}{2}t}t^2dt<+\infty$，故最终得到

$$F'(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta s}=-\int_0^{+\infty}t\,f(t)\,e^{-st}dt=-\mathcal{L}\big[tf(t)\big]。$$

□

有了定理 5.1 作保障，下面我们就可以讨论拉普拉斯变换的性质了。

三、拉普拉斯变换的性质

在下面的讨论中，我们总是假定 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理的条件，并且增长指数不大于 C。首先根据拉普拉斯变换的定义及拉普拉斯变换存在定理，有下面简单的性质：

性质 5.1 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 都满足增长指数不大于 C, $F_1(s)=\mathcal{L}\big[f_1(t)\big]$, $F_2(s)=\mathcal{L}\big[f_2(t)\big]$，则

$$\mathcal{L}\big[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)\big]=K_1F_1(s)+K_2F_2(s),$$

其中 K_1, K_2 为任意常数， $\mathrm{Re}\,s>C$。

性质 5.2（像函数的微分性质）设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathcal{L}\big[t^nf(t)\big]=(-1)^nF^{(n)}(s)\qquad(\mathrm{Re}\,s>C)。$$

例 5.3 求 t^ne^{Kt}（K 为实常数）的拉普拉斯变换。

解: 由例 5.1,

$$\mathcal{L}\big[e^{Kt}\big]=\frac{1}{s-K},\qquad(\mathrm{Re}\,s>K),$$

所以由性质 5.2,

$$\mathcal{L}[t^n e^{Kt}] = (-1)^n \frac{d^n}{d s^n}\Big(\frac{1}{s-K}\Big) = \frac{n!}{(s-K)^{n+1}}, \quad (\mathrm{Re}\, s > K)。$$

当 $K=0$ 时，就得到

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0。$$

性质 5.3（微分性质）设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 若当 $t>0$ 时， $f'(t)$ 存在，在 $(0,+\infty)$ 内的任何有限区间上， $f'(t)$ 除有有限个第一类间断点外连续，并且当 $f'(0+0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)$ 存在时，定义 $f'(0) = f'(0+0)$, 则

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0), \qquad (\mathrm{Re}\, s > C),$$

其中 $f(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$。

证明： 由拉普拉斯变换的定义，用分部积分得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st} d\, t \\ &= f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} d\, t。\end{aligned}$$

由于 $|f(t)| \le M\, e^{Ct}$, 所以当 $\mathrm{Re}\, s > C$ 时，

$$\big|f(t)\, e^{-st}\big| \le M\, e^{-(\mathrm{Re}\, s - C)t} \to 0 \qquad (t \to +\infty)。$$

从而 $\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$。 □

注： 在拉普拉斯变换的定义中，我们要求 $f(t)=0$, 当 $t<0$ 时。然而对许多函数在 $t\to 0^+$ 时，不为零，在 $t=0$ 处不连续，或在通常意义下也不可导，为了使问题处理起来能够较为简便，根据实际应用中的习惯，我们就认为

$$f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t), \qquad f^{(n)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(n)}(t)。$$

于是利用与性质 5.3 相类似的证明方法，可以得到

推论 5.1 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$。若 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内 n 次可导，且 $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 存在。设 $f^{(n)}(t)$ 满足拉普拉斯变换存在性定理的条件，则

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)。$$

特别当 $f(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0)$ 时， $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$ $(\mathrm{Re}\, s > C)$。

例 5.4 已知 $\mathcal{L}[\sin Kt] = \dfrac{K}{s^2+K^2}$, 其中 K $(K \ne 0)$ 是实常数，求 $\mathcal{L}[\cos Kt]$。

解： 由于 $\cos Kt = \Big(\dfrac{1}{K}\sin Kt\Big)'$, 所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos Kt] &= \frac{1}{K}\mathcal{L}[(\sin Kt)'] \\ &= \frac{1}{K}\big(s\,\mathcal{L}[\sin Kt] - \sin Kt\big|_{t=0}\big) \\ &= \frac{s}{K}\,\frac{K}{s^2+K^2} = \frac{s}{s^2+K^2}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0。\end{aligned}$$

性质 5.4（积分性质）

(1) 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$, 则

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}F(s), \qquad \mathrm{Re}\,s > C。$$

(2) 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且积分 $\displaystyle\int_s^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \lim_{A\to\infty}\int_s^A F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$ 收敛，则

$$\mathcal{L}\Big[\frac{f(t)}{t}\Big] = \int_s^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \qquad (\mathrm{Re}\,s > C)。$$

证明： (1) 由于在 $f(t)$ 的连续点处有 $g'(t) = f(t)$, 且 $f(t)$ 的间断点不影响它的定积分值，所以

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\,\mathcal{L}[g(t)] - g(0),$$

即

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(s)}{s}, \quad \mathrm{Re}\,s > C。$$

(2) 根据拉普拉斯变换的定义，我们有

$$\int_s^{+\infty}\mathrm{d}\,\xi\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\xi t}\,\mathrm{d}\,t = \int_s^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi。$$

由于在 $\mathrm{Re}\,\xi > C$ 内，$\left|f(t)\,\mathrm{e}^{-\xi t}\right| \le M\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\xi - C)t}$, 故 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}\,t$ 在 $\mathrm{Re}\,\xi > C$ 内内闭一致收敛，于是

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}\,t\int_s^\infty \mathrm{e}^{-\xi t}\,\mathrm{d}\,\xi\\ &= \int_0^{+\infty}\Big[-\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\xi t}\Big]_s^\infty f(t)\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t = \mathcal{L}\Big[\frac{f(t)}{t}\Big]。\end{aligned}$$

□

例 5.5 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}\,t$, $(a,\ b > 0)$。

解： 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}] &= \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at}] - \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-bt}]\\ &= \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b},\end{aligned}$$

故由性质 5.4 (2) 得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\right] &= \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\mathrm{d}\,\xi = \ln\frac{\xi+a}{\xi+b}\Bigg|_s^{+\infty}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\ln\frac{1+a/\xi}{1+b/\xi} - \ln\frac{s+a}{s+b} = \ln\frac{s+b}{s+a},\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \ln\frac{s+b}{s+a},$$

令 $s=0$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}。$$

性质 5.5 (位移性质) 设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(s-a), \qquad (\mathrm{Re}\,(s-a)>C)。$$

证明： 由拉普拉斯变换的定义可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t\\ &= F(s-a) \qquad (\mathrm{Re}\,(s-a)>C)。\end{aligned}$$

□

性质 5.6 (延迟性质) 设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 则对任一正数 t_0, 有

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)\,f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}F(s), \quad \mathrm{Re}\,s>C,$$

这里 $u(t)$ 是单位阶跃函数，即 $u(t)=1,\ t>0;\ u(t)=0,\ t<0$。

证明： 由拉普拉斯变换的定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t-t_0)\,f(t-t_0)] &= \int_0^{+\infty} u(t-t_0)\,f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ (\tau=t-t_0)\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-s(\tau+t_0)}\mathrm{d}\tau\\ &= \mathrm{e}^{-st_0}\,\mathcal{L}[f(t)]。\end{aligned}$$

□

此性质表明：若函数 $f(t)$ 开始取非零值的时刻 $t=0$ 推迟到 $t=t_0$, 则所得函数 $u(t-t_0)\,f(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换等于 $f(t)$ 的拉普拉斯变换乘以因子 e^{-st_0}。

例 5.6 设 $t_0>0$, 求 $\mathcal{L}[u(t-t_0)\sin(t-t_0)]$ 及求 $\mathcal{L}[\sin(t-t_0)]$。

解: 由性质 5.6,

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)\,\sin(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-st_0}, \quad (\mathrm{Re}\,s>0),$$

由于 $\sin(t-t_0)=\sin t\cos t_0-\sin t_0\cos t$, 故由性质 5.1, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(t-t_0)]&=(\cos t_0)\mathcal{L}[\sin t]-(\sin t_0)\mathcal{L}[\cos t]\\&=\frac{\cos t_0}{s^2+1}-\frac{s\,\sin t_0}{s^2+1},\qquad \mathrm{Re}\,s>0。\end{aligned}$$

由例 5.6 可以看出， $u(t-t_0)\sin(t-t_0)$ 与 $\sin(t-t_0)$ 是两个完全不同的函数，因此在用延迟性质时， $u(t-t_0)$ 是不能够丢掉的。

性质 5.7 (初值性质) 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微而且 $f'(t)$ 满足拉普拉斯变换存在性定理的条件。设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 则

$$f(0)=\lim_{\mathrm{Re}\,s\to\infty}sF(s)。$$

证明：设 $f'(t)$ 的增长指数为 C, 且 $G(s)=\mathcal{L}[f'(t)]$, 则

$$\begin{aligned}|G(s)|&=\left|\int_0^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t\right|\le\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,|\mathrm{e}^{-st}|\,\mathrm{d}\,t\\&\le\int_0^{+\infty}M\,\mathrm{e}^{Ct}\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(s)\,t}\mathrm{d}\,t=\frac{M}{\mathrm{Re}\,(s)-C},\end{aligned}$$

从而 $\displaystyle\lim_{\mathrm{Re}\,(s)\to\infty}G(s)=0$。另一方面，由性质 5.3 可得：

$$G(s)=\mathcal{L}[f'(t)]=s\,F(s)-f(0),$$

故

$$f(0)=\lim_{\mathrm{Re}\,(s)\to\infty}s\,F(s)。$$

□

性质 5.8 (终值性质) 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微，并且 $f'(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理的条件。设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, $s\,F(s)$ 在包含虚轴的右半平面内解析，则

$$f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}s\,F(s)。$$

证明：设 $G(s)=\mathcal{L}[f'(t)]$。由于 $s\,F(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,(s)>\alpha$ 内解析 $(\alpha<0)$, 故

$$G(s)=s\,F(s)-f(0)=\int_0^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t,$$

对 $\mathrm{Re}\,(s)>\alpha$ 中的任何一点 s 收敛，于是

$$\begin{aligned}\lim_{s\to0}s\,F(s)-f(0)&=\int_0^{+\infty}f'(t)\,\lim_{s\to0}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{d}\,t=f(+\infty)-f(0),\end{aligned}$$

即 $f(+\infty)=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}s\,F(s)$。

□

例 5.7 已知 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s+a}$ $(a>0)$, 求 $f(0)$ 和 $f(+\infty)$。

解: $f(0)=\displaystyle\lim_{\mathrm{Re}\,(s)\to\infty}s\,F(s)=\lim_{\mathrm{Re}\,(s)\to\infty}\frac{s}{s+a}=1,$

$$f(+\infty)=\lim_{s\to0}s\,F(s)=\lim_{s\to0}\frac{s}{s+a}=0。$$

由于 $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-st}] = \dfrac{1}{s+a}$, 故 $f(t) = \mathrm{e}^{-at}$, 显然, $f(0) = 1, f(+\infty) = 0$。

注: 在运用性质 5.8 时，必须要判断性质中的条件是否满足。比如对 $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, $sF(s)$ 在虚轴上有奇点 $s = \pm\mathrm{i}$, 因此不能对 $F(s)$ 运用性质 5.8 。尽管 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = 0$, 但由于

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1},$$

即 $f(t) = \sin t$, 故 $\lim\limits_{s\to\infty} f(t)$ 不存在，而不是 0。

由例 5.7 可以看出，性质 5.7 及性质 5.8 使我们只要根据已给出的像函数 $F(s)$, 就可以求出像原函数 $f(t)$ 的初值和终值 (即稳定状态下的数值), 而不必求 $f(t)$ 本身。这在工程技术的某些问题的处理上是非常有用的。

设 $f_1(t), f_2(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为零。含变量 t 的积分

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积函数 (或简称卷积), 记为 $f_1(t) \star f_2(t)$。

性质 5.9 (卷积性质) 设 $f_1(t), f_2(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理的条件，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)]\,\mathcal{L}[f_2(t)]。$$

证明: 由假设条件可知， $f_1(t) \star f_2(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理的条件，故

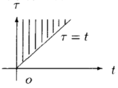


图 5–1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} \Big[f_1(t) \star f_2(t)\Big]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t。\end{aligned}$$

这个累次积分可以看成是 t—τ 平面上 (图 5–1 所示) 区域 (斜线部分) 上的二重积分。

由于此二重积分绝对可积，所以可以交换积分次序，即

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t \\ (t-\tau = u) \ &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \int_0^{+\infty} f_2(u)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{e}^{-su}\mathrm{d}\,u \\ &= \mathcal{L}[f_1(t)]\,\mathcal{L}[f_2(t)]。\end{aligned}$$

□

拉普拉斯变换的卷积性质在求像原函数及积分方程 (参见第十章第一节的有关内容) 等一些方面还有许多应用。

例 5.8 求 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]$。

解: 由于

$$F(s)=\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

而 $\mathcal{L}[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$, 故由性质 5.9,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]=\cos t\star\cos t=\int_0^t\cos\tau\,\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)。$$

§5.2 傅立叶变换

一、傅立叶变换的例子

在《高等数学》或《数学分析》中，我们已经学过，当周期函数 $f(t)$ 满足狄利克雷条件时，就可以展开为傅立叶级数。具体来说，设 $f(t)$ 是周期为 T 且在 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件的函数，则

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}nt},$$

其中

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nt}\mathrm{d}\,t,\qquad n=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\cdots$$

于是,

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nt}\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nt}。\tag{5.1}$$

对于非周期函数 $f(t)$, 我们可以认为它是某个以 T 为周期的周期函数 $f_T(t)$ 在 $T\to+\infty$ 时的极限。令 $\omega_n=\dfrac{2\pi}{T}n$, $\Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}=\dfrac{2\pi}{T}$,

$$\phi(\omega_n)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_n\tau}\mathrm{d}\,\tau。$$

则当 $T\to+\infty$ 时， $\Delta\omega\to0$, 于是根据 (5.1) 式得到

$$\begin{aligned}f(t)&=\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_n\tau}\mathrm{d}\,\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_nt}\Delta w\\&=\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_nt}\Delta\omega\end{aligned}\tag{5.2}$$

再由 (5.2) 式及广义积分的定义，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\tau}\mathrm{d}\,\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega。\tag{5.3}$$

(5.3) 式是非周期函数 $f(t)$ 的傅立叶积分公式。我们应该注意到 (5.3) 的推导只是形式上的，它忽略了一些等式成立的条件。下面的傅立叶积分存在定理则保证了 (5.3) 式能够成立。具体结果如下：

傅立叶积分存在定理 设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何有限区域上满足狄利克雷条件且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}\,t<+\infty$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\begin{cases} f(t) & t\ \text{为连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\ \text{为间断点} \end{cases}。$$

根据 (5.3) 式，令

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t=F(\omega), \tag{5.4}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega。 \tag{5.5}$$

(5.4) 式称为 $f(t)$ 的傅立叶变换， $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的像函数； (5.5) 式称为 $F(\omega)$ 的逆变换。

由傅立叶积分存在定理可知，当 $f(t)$ 满足傅立叶积分存在定理的条件时， $\mathcal{F}[f(t)]$, $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 都存在，而且

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases} f(t) & t\ \text{为连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\ \text{为间断点。} \end{cases}$$

例 5.9 求函数

$$f(t)=\begin{cases} 1, & 0<t\le 1, \\ 0, & t>1, \end{cases}$$

的傅立叶变换，并求 $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega$ 的值。

解: 由傅立叶变换的定义得：

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}}{\mathrm{i}\,\omega}=\frac{\sin\omega}{\omega}-\mathrm{i}\,\frac{1-\cos\omega}{\omega}=F(\omega)。$$

又由 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换公式得

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+\mathrm{i}\,\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\begin{cases} 1, & 0<t<1, \\ \dfrac{1}{2}, & t=0,1, \\ 0, & t>1。 \end{cases}$$

令 $t=0$, 则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega=\frac{1}{2},$$

即

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega=\frac{\pi}{2}。$$

例 5.10 求指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t} & t\geq 0\ (\beta>0),\\ 0, & t<0\end{cases}$$

的傅立叶变换，并求 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\,t$ 的值。

解: 显然 $f(t)$ 满足傅立叶变换存在的条件，故

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t\\ &=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t=\frac{-1}{\beta+\mathrm{i}\,\omega}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\,\omega)}\Big|_{0}^{+\infty}\\ &=\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\,\omega}=\frac{\beta-\mathrm{i}\,\omega}{\beta^2+\omega^2}。\end{aligned}$$

由于

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=0,\\ \beta, & t<0,\end{cases}$$

并且另一方面

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{i}\,\omega}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\,\omega+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\,\omega,\end{aligned}$$

而前一项中的被积函数为偶函数，后一项中的被积函数是奇函数，故

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\beta t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\,\omega=\begin{cases}\pi\,\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ 0, & t<0。\end{cases}$$

二、傅立叶变换的性质

在下面的讨论中，我们总是假定函数 $f(t)$ 满足傅立叶变换的条件。

性质 5.10（线性性质）设 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$, K_1, K_2 为两个复常数，则

$$\mathcal{F}[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)]=K_1F_1(\omega)+K_2F_2(\omega),$$
$$\mathcal{F}^{-1}[K_1F_1(\omega)+K_2F_2(\omega)]=K_1\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]+K_2\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]。$$

性质 5.11（位移性质）设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则

(1) $\mathcal{F}[f(t\pm a)]=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega a}F(\omega)$, ($a$ 为实数);

(2) $\mathcal{F}[f(t)\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t}]=F(\omega\mp\omega_0)$, ($\omega_0$ 为实数)。

证明：(1) 由傅立叶变换的定义，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t\pm a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\pm a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t\\ (x=t\pm a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x\mp a)\omega}\mathrm{d}\,x\\ &= \mathrm{e}^{\pm ia\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\,x\\ &= \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}a\omega}F(\omega)。\end{aligned}$$

(2) 由傅立叶变换的定义，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega\mp\omega_0)t}\mathrm{d}\,t = F(\omega\mp\omega_0)。\end{aligned}$$

□

注： 在信号处理中， $f(t)$ 称为连续信号， $F(\omega)$ 称为是 $f(t)$ 的频谱。这样，性质 5.11 (1) 就称为时域上的位移性质；性质 5.11 (2) 则称为频域上的位移性质。

性质 5.12（微分性质）

(1) 设 $f'(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，且在任何有限区间上除了有有限个第一类间断点外连续。设 $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=0$, 则 $\mathcal{F}[f'(t)]=\mathrm{i}\,\omega\mathcal{F}[f(t)]$;

(2) 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，且在任何有限区间上除了有有限个第一类间断点外连续。设 $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} F(\omega)=0$, 则 $\mathcal{F}[t\,f(t)]=-\mathrm{i}\,F'(\omega)$。

证明：(1) 由于 $|f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|=|f(t)|\to 0$ ($|t|\to\infty$), 故由分部积分法得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t\\ &= f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}\,\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t\\ &= \mathrm{i}\,\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t=\mathrm{i}\,\omega\mathcal{F}[f(t)]。\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}F(\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}F(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$$
$$= -\,\mathrm{i}\,t\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)],$$

故对上式两边同取傅立叶变换，得到 $F'(\omega) = -\mathrm{i}\,\mathcal{F}[tf(t)]$。 □

利用数学归纳法，可将性质 5.12 推广为：

推论 5.2 设 $f(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$,

(1) 设 $f^{(n)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，且在任何有限区间上除了有有限个第一类间断点外连续。设 $\lim\limits_{|t|\to\infty} f^{(k)}(t) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$。则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (\mathrm{i}\,\omega)^n F(\omega)。$$

(2) 设 $F^{(n)}(\omega)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，且在任何有限区间上除了有有限个第一类间断点外连续。设 $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} F^{(k)}(\omega) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$。则

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = \mathrm{i}^{\,n} F^{(n)}(\omega)。$$

例 5.11 设 $f(t)$ 是例 5.10 中的指数衰减函数。求 $\mathcal{F}[(t-a)^2 f(t-a)]$, a 是实数。

解： 由性质 5.11 (1),

$$\mathcal{F}[(t-a)^2 f(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega a}\mathcal{F}[t^2 f(t)]。$$

又 $\mathcal{F}[f(t)] = \dfrac{1}{\beta+\mathrm{i}\,\omega}$, 所以由推论 5.2, 得

$$\mathcal{F}[t^2 f(t)] = \mathrm{i}^{\,2}\Big(\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\,\omega}\Big)^{(2)} = \frac{2}{(\beta+\mathrm{i}\,\omega)^3},$$

所以最终得到

$$\mathcal{F}[(t-a)^2 f(t-a)] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega a}\frac{1}{(\beta+\mathrm{i}\,\omega)^3}。$$

性质 5.13 (积分性质) 设 $g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$。若 $F(0) = 0$, 则

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}F(\omega)。$$

证明： 由于在 $f(t)$ 的连续点处有 $g'(t) = f(t)$, 且 $f(t)$ 的间断点是第一类的，不影响积分值，故

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[g'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t$$
$$= g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}\,\omega\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t。 \tag{5.6}$$

又因为

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0t}\mathrm{d}\,t = F(0) = 0,$$

故由 (5.6) 式得到 $\mathcal{F}[g(t)] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\,\omega} F(\omega)$。 □

在拉普拉斯变换中，我们已经介绍了两个函数在 $[0, +\infty)$ 上的卷积的概念。现在，我们来对一般的可积函数给出卷积的定义。

定义 5.2 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义。若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

收敛，则称此积分为 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的卷积，记为 $f_1(t) \star f_2(t)$ (或 $f_1 \star f_2(t)$)。

容易证明：

命题 5.1 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 满足傅立叶变换存在的条件，则

(1) $f_1(t) \star f_2(t) = f_2(t) \star f_1(t)$;

(2) $[f_1(t) \star f_2(t)] \star f_3(t) = f_1(t) \star [f_2(t) \star f_3(t)]$;

(3) $f_1(t) \star [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) \star f_2(t) + f_1(t) \star f_3(t)$。

下面，我们考虑函数傅立叶变换与函数卷积的关系。我们有：

性质 5.14 (卷积性质) 设 $F_j(\omega) = \mathcal{F}[f_j(t)]$, $j = 1, 2$, 则

(1) $\mathcal{F}[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(\omega)\, F_2(\omega)$;

(2) $\mathcal{F}[f_1(t)\, f_2(t)] = \dfrac{1}{2\pi} F_1(\omega) \star F_2(\omega)$。

证明： 我们仅证明 (1), (2) 的证明与 (1) 相类似。由卷积的傅立叶变换的定义，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_1(t) \star f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f_1(t) \star f_2(t)\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t \\
\text{(交换积分次序)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{d}\,\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t\right] \\
\text{(由位移性质)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\tau} F_2(\omega)\,\mathrm{d}\,\tau \\
&= F_1(\omega)\, F_2(\omega)。
\end{aligned}$$

□

例 5.12 设有函数

$$f_1(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & t < 0,\ t > \dfrac{\pi}{2}。\end{cases}$$

求 $\mathcal{F}[f_1(t)\star f_2(t)]$ 及 $\Big(\mathcal{F}[f_1(t)]\star\mathcal{F}[f_2(t)]\Big)(\omega)$。

解: 由于

$$F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]=\frac{1}{1+\mathrm{i}\,\omega},$$
$$F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]=\frac{1-\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\frac{\pi}{2}}}{1-\omega^2},$$

所以

$$\mathcal{F}[f_1(t)\star f_2(t)]=F_1(\omega)\,F_2(\omega)=\frac{1-\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\omega}}{(1+\mathrm{i}\,\omega)\,(1-\omega^2)}。$$

注意到

$$f_1(t)\,f_2(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}\sin t, & 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

所以

$$\mathcal{F}[f_1(t)\,f_2(t)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,t=\frac{1-(1+\mathrm{i}\,\omega)\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\,\omega)\frac{\pi}{2}}}{1+(1+\mathrm{i}\,\omega)^2},$$

从而由性质 5.14 (2), 得

$$F_1(\omega)\star F_2(\omega)=2\pi\,\frac{1-(1+\mathrm{i}\,\omega)\,\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\,\omega)\frac{\pi}{2}}}{1+(1+\mathrm{i}\,\omega)^2}。$$

§5.3　广义函数的积分变换 *

在许多物理现象中，除了有一段时间间隔内分布的物理量外，还常会出现具有一种脉冲特征，在某一瞬间出现的物理量，例如瞬间作用的冲击力，瞬间电流，瞬时电动势等。这些瞬时的物理量是经常遇到的，要研究它们就会涉及到下面要介绍的单位脉冲函数，即 δ- 函数。

一、 δ- 函数的定义

例 5.13 在电流为零的电路中，从时刻 $t=t_0$ 到 $t_0+\epsilon$，通入一个单位电量的矩形脉冲，并设其电流强度为 $\delta_\epsilon(t-t_0)$，则有

$$\delta_\epsilon(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\epsilon} & t_0<t<t_0+\epsilon\\ 0 & t<t_0,\ t>t_0+\epsilon\end{cases},$$

（如图 5-2 所示）。

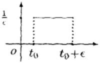


图 5-2

当时间间隔 $\epsilon \to 0^+$ 时，$\delta_\epsilon(t-t_0)$ 的极限状态就可以看成在瞬时 $t=t_0$ 通入单位电量所产生的电流。在电路分析中，称这个极限电流为作用在时刻 $t=t_0$ 的单位脉冲电流，称这个极限状态的函数为单位脉冲函数，即 δ- 函数，也称为狄拉克 (Dirac) 函数，记为 $\delta(t-t_0)$。

严格来说，$\delta(t-t_0)$ 不是通常意义下的函数，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t-t_0)\,\mathrm{d}\,t = 1,$$

而 $\delta(t-t_0)$ 本身可看作

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t=t_0, \\ 0, & t \neq t_0。 \end{cases}$$

因此，$\delta(t-t_0)$ 是属于一类新的函数，称为广义函数。这样，极限 $\delta(t-t_0) = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \delta_\epsilon(t-t_0)$ 也不是通常意义下的函数极限，称之为广义极限。现在，我们对这个极限来加以描述。

定义 5.3 若对任何 $\mathbf{R}$ 上的无限次可微且满足 $\{t \in \mathbf{R} \mid f(t) \neq 0\}$ 包含在某个有限区间的函数 $f(t)$ 都有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t-t_0)\, f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

则称 $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \delta_\epsilon(t-t_0) = \delta(t-t_0)$。

命题 5.2 设 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的无限次可微函数，且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t < +\infty$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\,\mathrm{d}\,t = f(t_0)。$$

证明： 由定义 5.3,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\,\mathrm{d}\,t &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t-t_0)\, f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon}\, f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{f(t_0+\epsilon)}{1} = f(t_0)。\end{aligned}$$

□

命题 5.2 可以给出 Dirac 函数 $\delta(t-t_0)$ 的一个等价定义，并由此我们可以对一般的广义函数在数学上加以严格的定义。

二、广义函数的定义

1. 广义函数的概念

为了引进广义函数并且要使它们与通常的函数具有相类似的性质，我们首先要建立基本函数空间的概念。

定义 5.4 设 $\mathcal{D}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内无限次可微，且在某一个有限区间以外为零的函数全体。按通常的函数加法和数乘，$\mathcal{D}$ 成为线性空间。设 $f_n, f \in \mathcal{D}$。若

(1) 存在一个有限区间 $[a,b]$，使得当 $x \notin [a,b]$ 时，$f_n(t)=0, n=1,2,\cdots$;

(2) 对每个非负整数 p，$f_n^{(p)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 $f^{(p)}(t)$，

则称 f_n 在 $\mathcal{D}$ 中收敛于 f，记为 $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$。

线性空间 $\mathcal{D}$ 按此收敛意义构成的空间，称为基本函数空间，$\mathcal{D}$ 中的函数称为基本函数。

若将上述的 $(-\infty,+\infty)$ 换成 $[0,+\infty)$，则按上述方法可同样定义基本函数空间 $\mathcal{D}_1$。

定义 5.5 设 F 是 $\mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$）到复数域 $\mathbb{C}$ 的映射，并且满足条件

(1) $F(K_1f_1+K_2f_2)=K_1F(f_1)+K_2F(f_2)$，其中 K_1, K_2 是复常数，$f_1, f_2 \in \mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$）;

(2) 对于 $\{f_n\}_1^\infty \subset \mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$），及 $f \in \mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$），当 $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}\,(\text{或}\mathcal{D}_1)} f$ 时，$F(f_n)\to F(f)$。

则我们称 F 是一个广义函数。

以 $\mathcal{D}^*$（或 $\mathcal{D}_1^*$）表示满足定义 5.4 条件 (1) 及 (2) 的映射全体。由定义 5.4 及命题 5.2，Dirac 函数 $\delta(t-t_0)$ 就可以表示为

$$\delta_{t_0}(f)=f(t_0), \qquad f\in\mathcal{D}。$$

这样，我们可将定义 5.3 换成一般的广义函数收敛的概念，具体如下：

定义 5.6 设 $\{F_\tau\}\subset\mathcal{D}^*$（或 $\mathcal{D}_1^*$），$F\in\mathcal{D}^*$，（或 $\mathcal{D}_1^*$），τ 趋于 0 或 ∞。我们称 F_τ 收敛于 F（当 $\tau\to0$ 或 ∞），若对任何 $f\in\mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$），$F_\tau(f)\to F(f)$。

2. 广义函数的导数

设 $f(t)$ 是连续可微函数，$\phi\in\mathcal{D}$，则

$$F(\phi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$$

定义了一个广义函数 F。由于

$$\begin{aligned}F(\phi') &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,\phi(t)\\ &= f(t)\,\phi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}\,t,\end{aligned}$$

所以，如果将 F 的导数 F' 对应为 $f'(t)$ 的话，则

$$F'(\phi)=-F(\phi')。 \tag{5.7}$$

(5.7) 式启示我们，应该如何来定义广义函数的导数。

定义 5.7 设 F 是 $\mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$）上的广义函数，则 F 的导数 F' 定义为 $F'(\phi)=-F(\phi')$，$\forall\,\phi\in\mathcal{D}$（或 $\mathcal{D}_1$）。

由定义 5.7, 我们可以定义 F 的任何阶导数 $F^{(n)}$ 为

$$F^{(n)}(\phi)=(-1)^n F(\phi^{(n)}),\qquad \phi\in\mathcal{D}\ (\text{或 }\mathcal{D}_1),\ \ n\geq 1。$$

例 5.14 设

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0。\end{cases}$$

$u(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，故在 $t=0$ 没有导数，但它作为广义函数

$$F_u(\phi)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t,\quad \forall\ \phi\in\mathcal{D}。$$

却有广义导数

$$\begin{aligned}F'_U(\phi)&=-F_U(\phi')=-\int_0^{+\infty}\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t\\&=-\phi(t)\Big|_0^{+\infty}=\phi(0)=\delta_0(\phi)\end{aligned}$$

即 $u'(t)=\delta(t)$。

在引进广义函数时，我们还希望对求导运算与极限运算可以任意交换顺序，对此有下述命题

命题 5.3 设 $\{F_\tau\}\subset\mathcal{D}^*$ (或 $\mathcal{D}_1^*$), $F\in\mathcal{D}^*$ (或 $\mathcal{D}_1^*$), 且 $F_\tau\to F$, 则 $F'_\tau\to F'$。

证明： $\phi\in\mathcal{D}$, 则由广义函数导数的定义可得

$$F'_\tau(\phi)=-F_\tau(\phi')\to F(\phi')=-F'_\tau(\phi)。$$

□

三、广义函数的积分变换

由于在经典的傅立叶变换中，有这样一个等式，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[f_1(t)]\,f_2(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\omega)\,\mathcal{F}[f_2(t)]\,\mathrm{d}\,\omega。$$

这个等式启发我们应该如何来定义广义函数的傅立叶变换及拉普拉斯变换。

定义 5.8 设 $F\in\mathcal{D}^*$ (或 $\mathcal{D}_1^*$), 则 F 的傅立叶变换 $\mathcal{F}[F]$ (或拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[F]$) 分别定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[F](\phi)&=F(\mathcal{F}[\phi(t)]),\qquad \forall\ \phi\in\mathcal{D},\\ \mathcal{L}[F](\phi)&=F(\mathcal{L}[\phi(t)]),\qquad \forall\ \phi\in\mathcal{D}_1。\end{aligned}$$

严格地讲，定义 5.8 不是太严密的，这是因为 $\mathcal{F}[\phi]$ (或 $\mathcal{L}[\phi]$) 不在 $\mathcal{D}$ (或 $\mathcal{D}_1$) 中。但我们可以将 F 的定义范围作适当的延拓，使之分别包含 $\mathcal{F}[\phi]$ 及 $\mathcal{L}[\phi]$。

现在我们看一下广义函数的傅立叶变换定义用在通常函数上是否与原来的傅立叶变换一致。

设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足傅立叶变换存在的条件，则

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t。$$

设 $f(t)$ 所确定的广义函数 F 为

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad \phi \in \mathcal{D}。$$

则

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\phi) = F(\mathcal{F}[\phi(t)]) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\mathcal{F}[\phi(t)](\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{d}\,\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}\,t\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau t}\mathrm{d}\,\tau\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f(\tau)](t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}\,t。
\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{F}[F] = \mathcal{F}[f(t)]$。

广义函数的拉普拉斯变换运用于普通函数时，也是通常的拉普拉斯变换，我们在这里就不作进一步的讨论了。

下面我们来看与 Dirac 函数有关的一些函数傅立叶变换及拉普拉斯变换。

例 5.15 证明： $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}$, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta(\omega)$。

证明： 由于 $\delta_{t_0}(\phi) = \phi(t_0)$, $\forall\, \phi \in \mathcal{D}$, 故

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta(t-t_0)](\phi) = \mathcal{F}[\delta_{t_0}](\phi) &= \mathcal{F}[\phi(t)](t_0) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0 t}\mathrm{d}\,t,
\end{aligned}$$

从而 $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}$。令 $t_0 = 0$, 则 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$。

对任意 $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[1](\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\phi(t)](\tau)\,\mathrm{d}\,\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\phi(t)](\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega}\mathrm{d}\,\omega \\
(\text{用傅立叶逆变换}) &= 2\pi\phi(0) = 2\pi\delta_0(\phi),
\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$。 □

例 5.16 求 $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)]$, $\mathcal{L}[\delta'(t-t_0)]$。

解: 设 $f \in \mathcal{D}_1$, 则 $\delta(t-t_0)$ 可定义为 $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$。于是

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}](f) = \delta_{t_0}\Big(\mathcal{L}[f(t)]\Big) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t_0 t}\,\mathrm{d}\,t,$$

即 $\mathcal{L}[\delta_{t_0}](s) = \mathrm{e}^{-t_0 s}$。当 $t_0 = 0$ 时， $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$。

对任意 $f \in \mathcal{D}_1$，由定义 5.7, 定义 5.8 得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta'_{t_0}](f) &= \delta'_{t_0}\Big(\mathcal{L}[f(t)]\Big) = -\delta_{t_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\mathcal{L}[f(t)]\right)\\ &= -\delta_{t_0}\big(-\mathcal{L}[t\,f(t)]\big)\\ &= \int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-t_0 t}\,\mathrm{d}\,t,\end{aligned}$$

于是，我们认为 $\mathcal{L}[\delta'_{t_0}] = s\,\mathrm{e}^{-t_0 s}$。

习 题 五

1. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}2 & 0 \le t < 2\\ -3 & 2 \le t < 4\\ 0 & t \ge 4\end{cases}$；　(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2}\\ \cos t & t > \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$。

2. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $\cos\dfrac{t}{2}$;　(2) $\mathrm{e}^{-t}\sin t$;　(3) $(t-1)^2$;

(4) $\sin^2 t$;　(5) $t^2\cos kt$;　(6) $t\mathrm{e}^{2t}\cos 3t$。

3. 利用像函数的积分性质，计算下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $\dfrac{\sin kt}{t}$;　(2) $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$;　(3) $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\tau}\sin t}{\tau}\,\mathrm{d}\,\tau$。

4. 求下列积分值：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}}{t}\,\mathrm{d}\,t$;　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}\,t$;　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^3\sin t)\mathrm{d}\,t$。

5. 求下列函数的傅立叶变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2 & |t| \le 1\\ 0 & |t| > 1\end{cases}$;　(2) $f(t)=\begin{cases}0 & t < -1\\ -2 & -1 < t < 0\\ 1 & 0 < t < 1\\ 0 & t > 1\end{cases}$。

6. 求下列函数的傅立叶变换，并证明所列积分的等式：

(1) $f(t)=\begin{cases} Ae^{-\beta t} & t>0 \quad (A>0,\ \beta>0) \\ 0 & t<0 \end{cases}$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases} \pi e^{-\beta t} & t>0 \\ \dfrac{\pi}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases};$$

(2) $f(t)=\begin{cases} \sin t & |t|\le\pi \\ 0 & |t|>\pi \end{cases}$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi\omega)\sin\omega t}{1-\omega^2}\,d\omega=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin t & |t|\le\pi \\ 0 & |t|>\pi \end{cases};$$

(3) $f(t)=e^{-\beta|t|}$, $\beta>0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}。$$

7. 求连续函数的傅立叶变换，其中 $\beta>0$，b 实数。

(1) $\dfrac{t}{(\beta^2+t^2)^2}$;　　(2) $\dfrac{e^{-ibt}}{\beta^2+t^2}$。

8. 求下列函数在 $[0,+\infty)$ 上的卷积，并求它们的拉普拉斯变换：

(1) $t\star t$;　　(2) $t\star\sin t$。

9. 设

$$f_1(t)=\begin{cases} e^{-t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases},\qquad f_2(t)=\begin{cases} \cos t & 0\le t\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & t<0,\ t>\dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

求 $f_1(t)\star f_2(t)$ 及 $\mathcal{F}[f_1(t)\star f_2(t)]$。

10*. 求下列函数的傅立叶变换：

(1) t;　　(2) $\sin^2 t$;　　(3) $u(t)e^{it}$。

第六章　留数及其应用

在这一章中，我们首先引进孤立奇点的概念，然后建立孤立奇点的留数计算公式，最后将留数计算公式应用于一些实变量函数的积分计算及拉普拉斯逆变换的计算。

§6.1　孤立奇点的分类

通过第四章的学习，我们已经知道了一个在环形区域内解析的函数一定可以展开成洛朗级数的形式。像这种在环形区域内解析的函数是很多的，比如

$$f(z)=\frac{1}{z-1},\ \ 0<|z-1|<+\infty;\ \ f(z)=\sin\frac{1}{z},\ \ 0<|z|<+\infty$$

等。对 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ 来说 $z=1$ 是奇点，但这个奇点是很孤立的，也就是说，$\dfrac{1}{z-1}$ 在除 $z=1$ 这点以外的所有点处都是解析的。像这种类型的奇点，我们称之为孤立奇点，它的准确定义如下：

定义 6.1 *设 $z=z_0$ 是 $\omega=f(z)$ 的奇点。若存在某个 $\delta>0$ 使得 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。*

但是我们应该注意到：对某些 $f(z)$ 来说，它们可能有不是孤立点的奇点。

例 6.1 *$f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 的奇点为 $z=0$ 及 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$, $k=\pm1,\pm2,\cdots$。因为 $\lim\limits_{|k|\to\infty}z_k=0$, 所以 0 就不是 $f(z)$ 的孤立点。*

现设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则在某个环形区域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，$f(z)$ 可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n。\tag{6.1}$$

根据 (6.1) 式中的负幂次项是有限个还是无限个，我们可以给出孤立奇点的分类如下：

定义 6.2 *设 $z=z_0$, $\omega=f(z)$ 如上所述而 $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 为 (6.1) 式中的复数列。*

(1) *若 $a_{-n}=0$, $n=1,2,\cdots$, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点;*

(2) *若 $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 不为零的项只有有限项而且存在自然数 m 使得 $a_{-m}\neq0$ 且 $a_{-n}=0$, $\forall n\geq m$, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的极点而 m 则称为极点 z_0 的级;*

(3) *若 $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 中有无限多项不为零，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。*

例 6.2 设 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点。由于

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \qquad |z| < +\infty,$$

故

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \qquad 0 < |z| < +\infty.$$

于是 $z=0$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点。

$f(z)=\frac{1}{z^2}$ 的孤立奇点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

对 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 来说，由于

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \qquad 0 < |z| < +\infty$$

故 $z=0$ 就是 $f(z)$ 的本性奇点。

有时对某个具体函数来说，在求它在某个孤立奇点的洛朗展开式比较困难时，我们也可用下面的命题来判断该奇点是什么类型的，而它的证明可以很容易地从定义 6.2 导出。

命题 6.1 设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点。则

(1) z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在;

(2) z_0 是 $f(z)$ 的极点当且仅当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

(3) z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点当且仅当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不为无穷也不存在。

对于极点的级的判断，我们有下面的定理：

定理 6.1 设 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则下列命题等价:

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点;

(2) 存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$ 内的解析函数 $h(z)$ 使得

$$h(z_0) \neq 0, \qquad f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}; \tag{6.2}$$

(3) 在补充定义 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在 $z=z_0$ 处为零后， z_0 是 $g(z)$ 的 n 级零点。

证明: (1)⇒(2) 由定义 6.2 (2), 存在 $a_{-n}\neq 0,\ n\geq 1$ 使得

$$f(z) = a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta。$$

令

$$h(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + \cdots, \quad |z-z_0| < \delta,$$

则 $h(z)$ 在 $U(z_0,\delta)$ 内解析且 $h(z_0)=a_{-n}\neq 0$; 同时,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}, \qquad 0 < |z-z_0| < \delta。$$

(2)⇒(3) 由 (6.2) 式,

$$g(z) = (z-z_0)^n \frac{1}{h(z)}, \qquad |z-z_0| < \delta,$$

故由解析函数零点的级的定义 (见 §4.5) 可知， z_0 是 $g(z)$ 的 n 级零点。

(3)⇒(1) 由命题 6.1 (2), $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 故在 z_0 的某个去心邻域 $U(\hat{z}_0,\delta)$ 内 $f(z)\neq 0$。于是 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $U(\hat{z}_0,\delta)$ 内解析而且 z_0 为 $g(z)$ 的可去奇点。由于 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=0$, 故可定义 $g(z_0)=0$。

因为 z_0 是 $g(z)$ 的 n 级零点，所以存在 $U(z_0,\delta)$ 内的解析函数 $\phi(z)$ 使得 $\phi(z_0)\neq 0$ 且 $g(z)=(z-z_0)^n\phi(z)$。从而，

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\frac{1}{\phi(z)},\quad 0<|z-z_0|<\delta。$$

最后，利用 $\dfrac{1}{\phi(z)}$ 在 z_0 处的泰勒展开式，我们就能得到结论。 □

例 6.3 设 $f(z)=\dfrac{z^2+z+2}{(z-\mathrm{i})^3(z+2)^2}$。由于当 $z=\mathrm{i}$ 或 -2 时， z^2+z+2 皆不为零，所以由定理 6.1 可知， $z=\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的三级极点而 $z=-2$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

例 6.4 求函数

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(\mathrm{e}^z-1)}$$

的孤立奇点并说明它们的类型。

解: $f(z)$ 的孤立奇点是 $z(\mathrm{e}^z-1)=0$ 的根 $z=z_k=2k\pi\mathrm{i}$, $k=0,\pm1\cdots$。z_0 使得 $f(z)$ 的分子、分母都为零，所以不能用定理 6.1 来判断它是否为极点。现在，我们分别将 $\sin z$ 及 e^z-1 在 $z=0$ 处进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}\sin z &=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots \qquad |z|<+\infty,\\ \mathrm{e}^z-1 &=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \qquad |z|<+\infty。\end{aligned}$$

于是

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\cdots}{1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots}=\frac{1}{z}h(z),\qquad 0<|z|<+\infty$$

而 $h(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 内解析并且 $h(0)\neq 0$, 故 0 是 $f(z)$ 的一级极点。

对于 $z=z_k$, $k=\pm1,\pm2,\cdots$, 由于

$$\left.\frac{1}{f(z)}\right|_{z=z_k}=\left.\frac{z(\mathrm{e}^z-1)}{\sin z}\right|_{z=z_k}=0$$

而且

$$\left.\frac{z}{\sin z}\right|_{z=z_k}\neq 0,\quad (\mathrm{e}^z-1)'\big|_{z=z_k}=\mathrm{e}^{z_k}=1,$$

故 z_k 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的一级零点，即 z_k 为 $f(z)$ 的一级极点， $k=\pm1,\pm2,\cdots$。

§6.2 留 数 定 理

一、留数的定义

设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内可展开为洛朗级数 (6.1) 式的形式。由于 (6.1) 式在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内内闭一致收敛，故对 $U(\hat{z}_0,\delta)$ 中任何一条内部包含 z_0 的简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_C(z-z_0)^n\,\mathrm{d}\,z。\tag{6.3}$$

注意到：

$$\oint_C(z-z_0)^n\,\mathrm{d}\,z=0,\quad n\neq-1,\quad \oint_C(z-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i},$$

所以 (6.3) 式变为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=a_{-1}。\tag{6.4}$$

从 (6.4) 式可知，在 $f(z)$ 关于 C 的积分中，a_{-1} 起着决定性的作用。因此，我们对 a_{-1} 特作定义如下：

定义 6.3 设 $z_0\in\mathbf{C}$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 $U(\hat{z}_0,\delta)$ 中包含 z_0 的正向简单闭曲线，则称积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，并记为

$$\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z。$$

由复合闭路定理可知，$\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]$ 与 C 的形状无关。

二、留数的计算公式

由留数的定义，我们只要求出函数 $f(z)$ 在孤立奇点处的洛朗展开式，就能求出 $f(z)$ 在该点的留数，但这样做一般来说是很麻烦的。下面我们将介绍一些求留数的常用公式。

命题 6.2 设 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

(1) 若 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=0$;

(2) 若 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z);$$

(3) 若 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点，则

$$\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{\,n-1}}{\mathrm{d}\,z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right];$$

(4) 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 处解析且 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$。则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点而且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}。$$

证明: (1) 由于 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，所以 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式中不含负幂项，故 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$。

由于 (2) 是 (3) 的特殊情况，我们只须证明 (3) 即可。设 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点，则 (6.1) 式化为

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\left[a_{-n}+a_{-(n-1)}(z-z_0)^{n-1}+\cdots+a_0(z-z_0)^n+\cdots\right]。$$

于是

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+\cdots,$$

从而

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{\,n-1}}{\mathrm{d}\,z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]=(n-1)!a_{-1},$$

即得:

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{\,n-1}}{\mathrm{d}\,z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]。$$

(4) 根据零点级的定义， z_0 是 $Q(z)$ 的一级零点，故存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$ 内的解析函数 $h(z)$ 使得

$$h(z_0)\neq 0,\ \ Q(z)=(z-z_0)h(z),\ z\in U(z_0)。$$

所以， $z=z_0$ 是

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{P(z)}{h(z)},\quad z\in U(z_0)$$

的一级极点，从而

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{P(z_0)}{h(z_0)}。$$

注意到 $Q'(z)=h(z)+(z-z_0)h'(z)$, 故最终得到

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}。$$

□

如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，我们只能采用先求 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式，再求 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]$ 的办法。

结合以上的留数计算公式，我们可以用下面的定理来计算 $f(z)$ 关于某些简单闭曲线的积分。

定理 6.2（留数定理）设 C 是一条正向简单闭曲线。若 $f(z)$ 在 C 上连续，在 C 所包围的区域 D 中除了有有限个孤立奇点 $z_1,\cdots,z_k$ 外解析，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[f(z),z_j]。$$

证明： 分别以 $z_1,\cdots,z_k$ 为圆心，在 C 的内部作 k 个互不相交的正向圆周 $C_1,\cdots,C_k$（见图 6–1）。于是由复合闭路定理及留数的定义可知

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{k}\oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[f(z),z_j]。$$

□

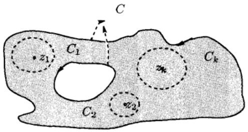


图 6–1

下面我们将利用命题 6.2 及定理 6.2 来计算一些积分。

三、例题

例 6.5 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^m(z-2)}$ 在 $z=1$ 及 $z=2$ 处的留数并求积分 $\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 的值。

解: $z=1$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点，故当 $m=1$ 时

$$\mathrm{Res}\,[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=-1$$

而当 $m\geq 2$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),1]=&\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to1}[(z-1)^m f(z)]^{(m-1)}\\=&\left.\frac{2(-1)^m}{(z-2)^{m+1}}\right|_{z=1}=-2。\end{aligned}$$

$z=2$ 是 $f(z)$ 的一级极点，所以

$$\mathrm{Res}\,[f(z),2]=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=2。$$

从而

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}\,[f(z),2] + \mathrm{Res}\,[f(z),1]) = \begin{cases} 1 & m=1 \\ 0 & m>1 \end{cases}。$$

例 6.6 计算积分 $\oint_{|z|=6} \tan z\,\mathrm{d}\,z$ 的值。

解：$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的极点为 $z_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$k = 0, \pm 1 \cdots$ 由于

$$\cos z|_{z=z_k} = 0, \quad (\cos z)' = -\sin z|_{z=z_k} = -1,$$

所以 $z = z_k$ 是 $\tan z$ 的一级极点。于是，由命题 6.2 (4),

$$\mathrm{Res}\,[\tan z, z_k] = \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=z_k} = 1。$$

我们需要找出落在 $|z| < 6$ 内的全部极点而对于 $|z| \geq 6$ 内的极点对此积分的计算是无用的。根据 z_k 的表达式，当 $k = 0, \pm 1, -2$ 时，$|z_k| < 6$。这样，由留数定理可得：

$$\oint_{|z|=6} \tan z\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\mathrm{i}(1+1+1+1) = 8\pi\mathrm{i}。$$

例 6.7 计算 $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z$。

解：$z = 1$ 是 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$ 的一级极点，故 $\mathrm{Res}\,[f(z),1] = \sin 1$。

由于 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，我们要求出 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的洛朗展开式中 -1 次幂的系数。注意到

$$\frac{1}{z-1} = -(1 + z + \cdots + z^n + \cdots) \qquad |z| < 1$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-1}} + \cdots \qquad 0 < |z| < +\infty,$$

所以，

$$\mathrm{Res}\,[f(z),0] = -(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots) = -\sin 1,$$

从而有 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

§6.3 定积分的计算

在这一节中，我们主要考虑在《高等数学》或《数学分析》中经常出现的三种类型积分，而这些积分在微积分的领域中是很难计算的，现在我们可以用留数公式来计算它们。

(1) $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$, 这里 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是关于 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的二元有理函数。

对这类积分，我们可令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$。则

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\theta=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ \mathrm{d}\,z=\mathrm{i}\,z\,\mathrm{d}\,\theta。$$

令 $F(z)=\frac{1}{\mathrm{i}\,z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$。则 $F(z)$ 是有理函数而且

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\oint_{|z|=1}F(z)\,\mathrm{d}\,z。\tag{6.5}$$

(6.5) 式的右边是一个复变函数 $F(z)$ 关于单位圆周的积分。如果 $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上没有极点而且 $z_1,\cdots,z_k$ 为 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内的全部极点，则由定理 6.2 得到:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[F(z),z_j]。$$

例 6.8 计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\,\theta\ (0<r<1)$。

解: 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, 则 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}\,z=\mathrm{i}\,z\,\mathrm{d}\,\theta$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\,\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\mathrm{i}\,(1-rz)(z-r)}\,\mathrm{d}\,z。$$

$f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}\,(1-rz)(z-r)}$ 在 $|z|<1$ 中的极点为 $z=r$ 且是一级极点。所以,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\,\theta=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,[f(z),r]=\frac{2\pi}{1-r^2}。$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}\,x$, 这里 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数而且 $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 的次数至少多 2; 同时, $Q(x)$ 没有实根。

我们以原点为圆心以 r 为半径在上半平面上作正向半圆周 C_r 并以 L_r 记为从 $(-r,0)$ 到 $(r,0)$ 点线段 (如图 6–2 所示) 。取 r 充分大，使得 $R(z)$ 在上半平面内的全部极点，也就是 $Q(z)$ 的在上半平面内的全部零点都落在 $\Gamma_r=C_r+L_r$ 所围成的区域的内部。于是由留数定理得,

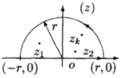


图 6–2

$$\int_{L_r}R(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_{C_r}R(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[R(z),z_j],\tag{6.6}$$

其中, $z_1,\cdots,z_k$ 为 $Q(z)$ 在上半平面上的全部零点。设

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$Q(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m,$$

且 $m \geq n+2$, 则

$$R(z)=\frac{1}{z^{m-n}}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{z}+\cdots+\dfrac{a_n}{z^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{z}+\cdots+\dfrac{b_m}{z^m}}=\frac{1}{z^{m-n}}G(z)。$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty}G(z)=\dfrac{a_0}{b_0}$, 故存在 $M>0$ 使得 $|G(z)|\leq M$, $|z|=r$, 从而

$$|R(z)|\leq\frac{M}{r^{m-n}},\ |z|=r。$$

于是,

$$\left|\int_{C_r}R(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\leq\frac{M}{r^{m-n}}\leq\frac{M}{r^2}\pi r=\frac{\pi M}{r}。$$

最后再由 (6.6) 式得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{r\to+\infty}\int_{L_r}R(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[R(z),z_j]。$$

例 6.9 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$。

解: 由于被积函数为偶函数，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x。$$

令 $R(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$。则 $R(z)$ 在实轴上无极点，在上半平面上有两个一级极点 $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$。由于

$$\mathrm{Res}\,[R(z),z_j]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_j}=\frac{1}{4z_j},\quad j=1,2$$

所以,

$$\int_0^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\,(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}\,x\ (\alpha>0)$, 其中 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数而且分母的次数比分子的次数至少多一次，并且 $Q(x)$ 没有实根。

为了得到上述积分的计算公式，我们需要下面的引理:

引理 6.1 设 C_r 为以原点为圆心、以 r 为半径的上半平面中的正向半圆周， $f(z)$ 在 C_r 上连续。若 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$, 则

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z=0\quad(\alpha>0)。$$

证明： 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$\theta\in[0,\pi]$。由于 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，故对 $\forall\epsilon>0$，当 $|z|=r$ 充分大时，$|f(z)|<\epsilon$，于是

$$\left|\int_{C_r}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z\right|\le\left|\int_0^{\pi}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\mathrm{i}\,r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\right|$$
$$\le r\epsilon\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=2r\epsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta。\qquad(6.7)$$

注意到：当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$，所以从 (6.7) 式得到

$$\left|\int_{C_r}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z\right|\le2r\epsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha r\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{\pi}{\alpha}\epsilon(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})\le\frac{\pi}{\alpha}\epsilon,$$

这就证明了结论。 □

现在我们来导出上述积分的计算公式。设 L_r，C_r 同 (2) 中的取法。取 r 充分大，使得 $R(z)$ 在上半平面内的所有极点 $z_1,\cdots,z_k$ 全部落在 L_r+C_r 所围成的区域内。于是，由留数定理得到：

$$\int_{-r}^{r}R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z+\int_{C_r}R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z},z_j]。\qquad(6.8)$$

最后，在 (6.8) 式中令 $r\to+\infty$，并利用引理 6.1 于 (6.8) 式，得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}\,x=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z},z_j]。$$

例 6.10 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x$。

解： $R(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+2}$ 在上半平面内只有一个一级极点 $z=1+\mathrm{i}$ 而且

$$\mathrm{Res}\,[R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},1+\mathrm{i}]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2-2z+2)'}\right|_{z=1+\mathrm{i}}$$
$$=\frac{\cos1-\sin1+\mathrm{i}(\cos1+\sin1)}{2\mathrm{e}\,\mathrm{i}}。$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x=2\pi i\mathrm{Res}\,[R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},1+\mathrm{i}]$$
$$=\frac{\pi}{\mathrm{e}}[\cos1-\sin1+\mathrm{i}(\cos1+\sin1)],$$

即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\mathrm{e}}(\cos1+\sin1)。$$

若在 (3) 中，我们把 $Q(z)$ 没有实根的条件改为： $Q(z)$ 在实轴上只有 s 个一级零点 $\lambda_1 \cdots, \lambda_s$ 而其它条件不变，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}, z_j] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\mathrm{Res}\,[R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}, \lambda_j]\right\}^*, \tag{6.9}$$

其中， $z_1 \cdots, z_k$ 是 $R(z)$ 在上半平面中的全部极点。

这个计算公式的证明依赖于下面的一个引理：

引理 6.2 设 λ 是 $f(z)$ 在实轴上的一级极点。以 λ 为圆心、以 ρ 为半径在上半平面内作一个正向半圆周 C_ρ。设 $f(z)$ 在 C_ρ 上连续并且令

$$\mu = \mathrm{Res}\,[f(z), \lambda] = \lim_{z\to\lambda}(z-\lambda)f(z),$$

则

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \mu\int_{C_\rho}\frac{1}{z-\lambda}\,\mathrm{d}\,z\right] = 0。$$

例 6.11 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$。

解: 由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x}\,\mathrm{d}\,x\right]。$$

又 $R(z) = \dfrac{1}{z}$ 只有一个极点 $z = 0$, 它是一级极点而且在实轴上，所以由 (6.9) 式得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x}\,\mathrm{d}\,x = \pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}}{z}, 0\right] = \pi\,\mathrm{i},$$

从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$。

§6.4 拉普拉斯逆变换的计算 *

在第六章的第一节中，我们讨论了拉普拉斯变换的一些计算公式，但对于已知像函数如何求它的对应的像原函数却未涉及到，所以在本节中我们要用留数定理来给出求拉普拉斯变换的像原函数的计算公式。

定理 6.3 设定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在的条件且 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$。则 $F(s)$ 的逆拉普拉斯变换 $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ 由下式给出：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\,\infty}^{\beta+\mathrm{i}\,\infty} F(s)\mathrm{e}^{\,st}\,\mathrm{d}\,s = \begin{cases} f(t) & t\ 为\ f(t)\ 的连续点 \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\ 为\ f(t)\ 的间断点 \end{cases}。 \tag{6.10}$$

这里的积分路径是平行于虚轴的任一直线 $\mathrm{Re}(s) = \beta > C$, (6.10) 式中的积分应理解为

$$\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s = \lim_{\tau\to+\infty}\int_{\beta-\mathrm{i}\tau}^{\beta+\mathrm{i}\tau} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s。$$

证明： 为了方便起见，我们令 $f(t) = 0, \forall t \in (-\infty, 0)$。由 §6.1 中的拉普拉斯变换存在定理，当 $\beta = \mathrm{Re}(s) > C$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}\,t \le \frac{1}{\beta - C},$$

同时，$f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 满足傅立叶积分存在定理的全部条件。所以，由傅立叶积分公式可得

$$\begin{aligned}\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\mathrm{e}^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega,\end{aligned}$$

将上式两边同乘 $\mathrm{e}^{\beta t}$ 并令 $s = \beta + \mathrm{i}\omega$, 则上式化为

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty} f(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s \quad (t > 0),$$

其中的积分路径是半平面 $\beta = \mathrm{Re}(s) > C$ 内的任一条平行于虚轴的直线。 □

在 (6.10) 式中，等式右边的被积函数 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 在 $\mathrm{Re}(s) > C$ 的区域内是解析函数而且这个积分的形式与 §6.3 中的形式相类似，所以我们希望能够用留数公式来计算它。

设 $s_1, \cdots, s_k$ 为 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) < C$ 内的所有孤立奇点。现取如图 6–3 所示的正向闭曲线 $C = C_R + \overrightarrow{AB}$, C_R 是在直线 $\mathrm{Re}(s) = \beta > C$ 左侧、以 R 为半径、$(\beta, 0)$ 为圆心的半圆。取 R 充分大，使得 $s_1, \cdots, s_k$ 落在 C 的内部。于是由留数定理得：

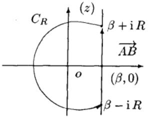


图 6–3

$$\int_{\overrightarrow{AB}} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s + \int_{C_R} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st}, s_j]。\tag{6.11}$$

利用与引理 6.1 相类似的证明方法，我们能够证明：当 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=0$ 时，

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s=0。$$

从而在 (6.11) 式中，令 $R\to+\infty$, 则就有

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},s_j]。\tag{6.12}$$

公式 (6.12) 使用起来很方便，但有一点要注意，就是要验证条件

$$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$$

是否满足。

例 6.12 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$, 求 $f(t)$。

解: $F(s)$ 有两个二级极点 $s=\mathrm{i},\ -\mathrm{i}$。由于

$$\mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},\mathrm{i}]=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(1-\mathrm{i}t)}{4\mathrm{i}},\quad \mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},-\mathrm{i}]=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}(1+\mathrm{i}t)}{4\mathrm{i}}$$

并且 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$, 所以由 (6.12) 式得到：

$$f(t)=\mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},\mathrm{i}]+\mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},-\mathrm{i}]=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)。$$

§6.5 幅 角 原 理 *

在这一节中，我们首先讨论复变函数的幅角原理，然后再在此基础上导出判断解析函数在某个区域内零点个数的儒歇 (Rouché) 定理。

一、幅角原理

在 §6.1 中我们已经知道，若 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $h(z)$ 在 a 点处解析而且 $h(a)\neq 0$。于是在 $U(\hat{a})$ 内

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-m\frac{1}{z-a}+\frac{h'(z)}{h(z)}。$$

由于 $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ 在 $z=a$ 处解析，所以 $z=a$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，而且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=-m。\tag{6.13}$$

设 $f(z)$ 在 $z=b$ 处解析。若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 n 级零点，则在 $U(\hat{b})$ 内 $f(z)$ 可写成为

$$f(z)=(z-b)^n\phi(z),$$

其中 $\phi(z)$ 在 $z=b$ 处解析且 $\phi(b)\neq 0$, 从而

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=n\frac{1}{z-b}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}。$$

由此可知， $z=b$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，而且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=n。\tag{6.14}$$

结合 (6.13) 式、 (6.14) 式及留数定理，不难得到下面的结论：

命题 6.3 设 $f(z)$ 在正向简单闭曲线 C 上解析且不为零。又设 $f(z)$ 在 C 的内部除了有限个极点 $a_1,\cdots,a_k$ 外解析； $b_1,\cdots,b_l$ 是 $f(z)$ 在 C 的内部的全部零点。记 m_j 为 a_j 的级， $j=1,\cdots,k$; n_j 为 b_j 的级， $j=1,\cdots,l$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z=\sum_{j=1}^{l}n_j-\sum_{j=1}^{k}m_j。\tag{6.15}$$

若对每个零点 (或极点) 是几级就算作是几个的话，那么在 (6.15) 式中，

$$N=\sum_{j=1}^{l}n_j,\quad P=\sum_{j=1}^{k}m_j$$

分别就是 $f(z)$ 在 C 的内部的零点和极点的总数，并且 (6.15) 式还可写成

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z=N-P。\tag{6.16}$$

现在将 (6.16) 式的左边写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z=&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\mathrm{d}\,[\ln f(z)]\\=&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\oint_C\mathrm{d}\,\ln|f(z)|+\mathrm{i}\oint_C\mathrm{d}\arg f(z)\right]。\end{aligned}\tag{6.17}$$

注意到：当 z 从 C 上某一点 z_0 为起点沿 C 的正向绕行一周回到 z_0 时， $\ln|f(z)|$ 从

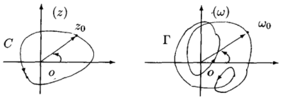


图 6–4

$\ln|f(z_0)|$ 起连续地变化，最终回到 $\ln|f(z_0)|$, 没有发生变化；而 $\arg f(z)$ 则不然，当 z 从

z_0 出发沿 C 的正向再回到 z_0 时，$\arg f(z)$ 从 $\arg f(z_0)$ 变为 $\arg f(z_0)+2k\pi$, 这里 k 是曲线 $\Gamma=f(C)$ 绕 $\omega=0$ 作正向旋转的次数 (如图 6–4 所示)。

记 $\Delta_C \arg f(z)=k$ 表示当 z 沿 C 的正向绕行一周后，$\arg f(z)$ 的增量，则 (6.17) 式可变成

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z =&\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}[(\ln|f(z_0)|+\mathrm{i}(\arg f(z_0)+2k\pi))\\
&-(\ln|f(z_0)|+\mathrm{i}\arg f(z_0))]\\
=&\frac{k}{2\pi}=\frac{\Delta_C\arg f(z)}{2\pi}。
\end{aligned}
$$

上述的推导过程实际上是完成了一个所谓的“幅角原理”的证明，也就是下面的一个定理的证明。定理如下：

定理 6.4（幅角原理）设 $f(z)$ 在正向简单闭曲线 C 上解析且不为零，在 C 的内部除了有限个极点外解析。则 $f(z)$ 在 C 的内部中的零点与极点的差为 $\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$（等于 z 在 C 沿正向绕 C 一周时，$\omega=f(z)$ 在 (ω) 平面内绕原点作正向转动时的环绕圈数）。

二、幅角原理的两个应用

利用幅角原理，我们可以研究复变函数在一区域内的零点与极点个数的差。在一些具体的应用上，下面的儒歇 (Rouchè) 定理却显得更为方便：

定理 6.5 设 $f(z)$, $g(z)$ 在正向简单闭曲线 C 上及 C 的内部都解析，并且在 C 上满足条件 $|f(z)|>|g(z)|$。则在 C 的内部，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 有相同的零点数目。

证明： 由于在 C 上有 $|f(z)|>|g(z)|$, 所以我们得到 $|f(z)|>0$ 且

$$|f(z)+g(z)|\geq|f(z)|-|g(z)|>0$$

$\forall z\in C$。令 $\psi(z)=1+\frac{g(z)}{f(z)}$, $\forall z\in C$, 则在 C 上，$f(z)+g(z)=f(z)\psi(z)$, 从而

$$\Delta_C\arg(f(z)+g(z))=\Delta_C\arg f(z)+\Delta_C\arg\psi(z)。\tag{6.18}$$

因为对任意 $z\in C$, $|1-\psi(z)|=\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$, 即 $\omega=\psi(z)$ 在以 1 为圆心的单位圆的内部 (图 6–5), 所以，C 的像曲线 $\Gamma=\psi(C)$ 不围绕原点，从而 $\Delta_C\arg\psi(z)=0$。最后，由 (6.18) 得到：

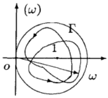


图 6–5

$$
\begin{aligned}
f(z)+g(z)\text{ 的零点个数 }=&\Delta_C\arg(f(z)+g(z))\\
=&\Delta_C\arg f(z)=f(z)\text{ 的零点个数。}
\end{aligned}
$$

□

例 6.13 设 $a>\operatorname{ch}1$ 证明：在 $|z|<1$ 内方程 $\sin z=az$ 只有唯一的一个根 $z=0$。

解: 根据儒歇定理，我们只须证明当 $|z|=1$ 时， $|\sin z|<a$ 即可。

设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$, 则

$$
\begin{aligned}
|\sin z| &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-\sin\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos\theta}-\mathrm{e}^{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cos\theta}\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\sin\theta}+\mathrm{e}^{\sin\theta}\right)=\operatorname{ch}(\sin\theta)。
\end{aligned}
$$

用求导法可以算出函数 $\operatorname{ch}(\sin\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值为 $\operatorname{ch}1$, 最小值是 1, 从而 $|\sin z|<a,\ \forall\,|z|=1$。

幅角原理还可用于判断一个多项式是否在右半平面没有根。一个多项式是否在右半平面没有根的问题与常微分方程解的稳定性有着十分密切的关系。限于篇幅，我们不在这个方面进行论述，但我们还是不加证明地给出下面的结果：

定理 6.6 设多项式 $P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在虚轴上没有零点。设 $R>0$ 而 L_R 为在虚轴上从 $-\mathrm{i}R$ 到 $\mathrm{i}R$ 的直线段，则当

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{L_R}\arg P_n(z)=-n\pi$$

时， $P_n(z)$ 在右半平面内没有根。

习 题 六

1. 求下列函数的孤立奇点，并指出它们的类型 (对极点要指出其级数)：

   (1) $\dfrac{z}{(z^2+\mathrm{i})^2}$; (2) $\dfrac{1}{z^2(1-\mathrm{e}^{z})}$; (3) $\dfrac{z-a}{\sin z-\sin a}$;

   (4) $\dfrac{\mathrm{e}^{z}-1}{\sin z-1}$; (5) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$; (6) $\dfrac{z^4+3z^2+2}{(z^2+3z-4)^2}$。

2. 求下列函数关于每个孤立奇点的留数：

   (1) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{z}}$; (2) $\tan z$; (3) $\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$;

   (4) $\dfrac{z}{1-\cos z}$; (5) $z^n\sin\dfrac{1}{z}$; (6) $\mathrm{e}^{-\frac{z+1}{z-1}}$。

3. 计算下列积分：

   (1) $\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,\mathrm{d}z$, n 是自然数；

   (2) $\displaystyle\oint_{|z-1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$;

   (3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z+1}{(z^3-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z$;

   (4) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$。

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}\,\mathrm{d}\,x$;　　(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{1-2p\cos 2\theta+p^2}\,\mathrm{d}\,\theta$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+2x}{x^4+1}\mathrm{d}\,x$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}\,x$;　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$。

5. 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$。

6. 求下列像函数 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换：

(1) $\frac{1}{s^4-1}$;　　(2) $\frac{1}{(s^2+1)s^3}$;　　(3) $\frac{s}{(s^2+4)^2}$。

7. 函数在无穷远点的留数定义如下：

设 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，C 为此区域内包含原点的任何一条正向简单闭曲线。积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}\,z$ 称为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数，记作 $\mathrm{Res}\,[f(z),\infty]$。

(1) 证明：$\mathrm{Res}\,[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\,[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$;

(2) 设 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在所有个奇点 (包括 ∞ 点) 的留数的总和必等于零。

8. 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{2}{z^4-1}\mathrm{d}\,z$;

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}\,z}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$。

9*. 求下列方程在 $|z|<1$ 内的根的数目：

(1) $\mathrm{e}^{z-\lambda}=z$, $(\lambda>1)$;

(2) $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$;

(3) $z^7-5z^4+z^2-2=0$。

10*. 证明第六章中的引理 6.2。

第七章　共形映射

我们将在本章中研究某些解析函数的共形映射性质。共形映射理论是函数论中最重要的研究方向之一，它由物理学的观念所产生，并对物理学的许多领域有极为重要的应用。

§7.1　共形映射的概念

一、导数的几何意义

在第一章中，我们已经指出：复变函数 $\omega = f(z) = u + \mathrm{i}v$ 可以看成一个变换

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases},$$

它将 (z) 平面上的点 (x,y) 变换为 (ω) 平面上的点 $(u(x,y), v(x,y))$。基于这个原因，我们自然要问：(z) 平面内的区域通过 $\omega = f(z)$ 会变成 (ω) 平面内的什么区域？(z) 平面内的曲线与经过 $\omega = f(z)$ 映射后得到的 (ω) 平面内曲线，它们的形状、方向的关系如何？带着这两个问题，来考虑解析函数的导数在图形变换中的意义。

设 $\omega = f(z)$ 在 z_0 点解析且 $f'(z_0) \neq 0$。设光滑曲线 C: $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ 通过点 $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$ 且 $z'(t_0) \neq 0$。取 $t \in [a,b]$, $t > t_0$ (或 $t < t_0$)，得到曲线 C 上的点 $z = z(t)$。曲线 C 的过点 z_0 和 z 的割线 l 的方向规定为与向量 $\overrightarrow{z_0 z}$ (或 $\overrightarrow{z z_0}$) 相同，从而 l 的方向与 $\dfrac{z - z_0}{t - t_0}$ 的方向相同。由于 $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{z - z_0}{t - t_0} = z'(t_0)$，且当 $t \to t_0$ 时，割线 l 趋向于 C 在 z_0 处的切线 T，于是 T 的方向与 $z'(z_0)$ 的方向一致，T 与实轴的正向夹角为 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$。

设 Γ: $\omega = \omega(t) = f(z(t))$, $a \leq t \leq b$ 为 C 经过 $\omega = f(z)$ 映射后的像曲线。则 Γ 在 $\omega_0 = f(z_0)$ 处的切线在 (ω) 平面内与实轴的正向夹角 $\operatorname{Arg} \omega'(t_0)$ 为

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \omega'(t_0) &= \operatorname{Arg} [f(z(t))]' \big|_{t=t_0} \\ &= \operatorname{Arg} f'(z_0) z'(t_0) \\ &= \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z'(t_0) \end{aligned}$$

(参见图 7-1)。于是，如果我们假定图 7-1 中的 x 轴与 u 轴，y 轴与 v 轴的正向相同，则

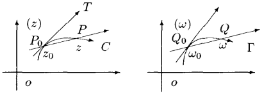


图 7-1

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} \omega'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0)。 \tag{7.1}$$

如果我们假定图 7-1 中的 x 轴与 u 轴，y 轴与 v 轴的正向相同，而且将原来的切线的正向与映射过后的切线的正向之间的夹角理解为曲线 C 经过 $\omega = f(z)$ 映射后在 z_0 处的转动角，则 (7.1) 式表明：

(1) $f'(z_0)$ 的幅角 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 是曲线 C 经过 $\omega = f(z)$ 映射后在 z_0 处的转动角；

(2) 转动角的大小、方向与曲线 C 的形状、方向无关，即 $\omega = f(z)$ 具有保持转动角的不变性。

设曲线

$$C_1\colon z = z_1(t), \quad C_2\colon z = z_2(t), \qquad \alpha \le t \le \beta$$

相交于 $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0')$ 而且 $z_1'(t_0) \neq 0$, $z_2'(t_0') \neq 0, \alpha < t_0$, $t_0' < \beta$。又设映射 $\omega = f(z)$ 将 C_1 与 C_2 分别映射为相交于点 $\omega_0 = f(z_0)$ 的曲线 Γ_1 及 Γ_2, 它们的参数方程分别是

$$\omega = \omega_1(t) = f(z_1(t)),\ \omega = \omega_2(t) = f(z_2(t)),\ \alpha \le t \le \beta。$$

由 (7.1) 式得：

$$\operatorname{Arg} \omega_1'(t_0) - \operatorname{Arg} z_1'(t_0) = \operatorname{Arg} \omega_2'(t_0') - \operatorname{Arg} z_2'(t_0'),$$

即

$$\operatorname{Arg} \omega_2'(t_0') - \operatorname{Arg} \omega_1'(t_0) = \operatorname{Arg} z_2'(t_0') - \operatorname{Arg} z_1'(t_0)。 \tag{7.2}$$

如果我们认为相交于一点的两条曲线 C_1 与 C_2 的正向夹角就是 C_1 与 C_2 在交点处的两条切线之间的夹角，则 (7.2) 式表明：相交于 z_0 点的任何两条曲线 C_1 与 C_2 之间的夹角，在其大小和方向上都等同于经过 $\omega = f(z)$ 映射后跟 C_1 与 C_2 对应的曲线 Γ_1 与 Γ_2 之间的夹角。所以 $\omega = f(z)$ 在 z_0 具有保持两曲线间夹角的大小与方向不变的性质。这种性质称为映射的保角性 (如图 7-2 所示)。

下面，我们再来说明 $|f'(z_0)|$ 的几何意义。

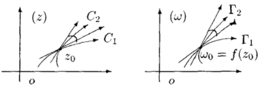


图 7–2

设 $\omega = f(z)$ 为复变函数，在 z_0 未必可导。如图 7–3 所示，设 z 在 C 上，Γ 为 C 通过 $\omega = f(z)$ 映射后的曲线，则 $\omega = f(z)$ 在 Γ 上。现设 $z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\omega - \omega_0 = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, 且用 Δs 表示 C 上的点 z 与 z_0 之间的一段弧长；$\Delta\sigma$ 表示 Γ 上的对应点 ω_0 与 ω 之间的弧长。极限值 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ 称为曲线 C 在 z_0 处的伸缩率。

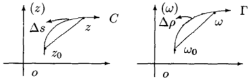


图 7–3

设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，且 $f(z_0) \neq 0$。由于

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta s}{r} = \lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\sigma}{\rho} = 1,$$

$$\frac{\omega-\omega_0}{z-z_0} = \frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\frac{\rho}{\Delta\sigma}\frac{\Delta s}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)},$$

所以，

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \tag{7.3}$$

即通过 z_0 点的曲线 C 经过 $\omega = f(z)$ 的映射后，在 z_0 处的伸缩率为 $|f'(z_0)|$, 它是一个与曲线 C 的形状及方向都无关的常数。所以，这种映射又称为具有伸缩率不变性。

综上所述，我们有下面的定理：

定理 7.1 设 $\omega = f(z)$ 在区域 D 内解析，$z_0 \in D$ 使得 $f'(z_0) \neq 0$。则映射 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处具有性质：

(1) 保角性。即通过 z_0 的两条曲线间的夹角与经过映射后所得的两条曲线间的夹角在大小、方向上保持不变；

(2) 伸缩率不变性。即通过 z_0 的任何一条曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$ 而与它的形状和方向无关。

二、共形映射的概念

我们将解析函数在定理 7.1 中所具有的两条性质推广成为如下的定义：

定义 7.1 设 $\omega = f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义，且在 z_0 处具有保角性和伸缩率不变性，则我们就称映射 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处是共形的，或称 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处是共形映射。

若 $\omega = f(z)$ 在区域内有定义而且是在 D 内的每一点都是共形的，则称 $\omega = f(z)$ 是 D 内的共形映射。

结合定理 7.1 及定义 7.1, 我们有下面的推论：

推论 7.1 如果函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处解析，而且 $f'(z_0) \neq 0$, 则映射 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处共形，而且 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 表示这个映射在 z_0 的转动角，$|f'(z_0)|$ 表示 $\omega = f(z)$ 在 z_0 处的伸缩率。

如果解析函数 $\omega = f(z)$ 在 D 内每点 z 都有 $f'(z) \neq 0$, 则映射 $\omega = f(z)$ 是 D 内的共形映射。

我们同样可以考虑在扩充复平面 $\mathbf{C}^+$ 内的共形映射问题。设 $\omega = f(z)$ 是一个复变函数，并且有一点 $z_0 \in \mathbf{C}$ 使得 $f(z_0) = \infty$。若映射 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 在 z_0 处是共形的，则称 $f(z)$ 在 z_0 处是共形的；对于 $z_0 = \infty$, 当映射 $g(z) = f(\dfrac{1}{z})$ 在 $z = 0$ 处具有共形性时，我们就称 $f(z)$ 在 ∞ 处具有共形性。事实上，这样的规定等同于两条曲线 $z = z_1(t)$, $z = z_2(t)$ 在无穷远点的交角定义为 $\dfrac{1}{z_1(t)}$ 及 $\dfrac{1}{z_2(t)}$ 在原点处的交角。

例 7.1 设 $\omega = f(z) = z^2$。由 $f'(z) = 2z$ 可知 $\omega = z^2$ 在区域 $D = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ 内是共形的。在 $z = \infty$ 时，由于 $g(z) = \left[f(\dfrac{1}{z})\right]^{-1} = z^2$ 在 $z = 0$ 不共形，故 $f(z)$ 在 ∞ 处不共形。

令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, 则 $\omega = z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$, 从而它将上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映成为 (ω) 平面中的一个去掉原点及正实轴的区域。

在 $z \neq 0$ 时，$f(z)$ 的转动角及伸缩率分别为

$$\operatorname{Arg} f'(z) = \operatorname{Arg}(2z), \quad |f'(z)| = 2|z|。$$

例 7.2 设 $\omega = f(z)$ 在区域 D 内解析而且存在 $z_0 \in D$ 使得 $f'(z_0) \neq 0$。在 D 内作一个以 z_0 为一个顶点的小三角形。于是在映射 $\omega = f(z)$ 下，在 (ω) 平面内就有一个以 $w_0 = f(z_0)$ 为其中一个顶点的小曲边三角形（如图 7–4 所示）。

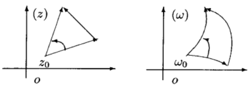


图 7–4

由定理 7.1 可知，这两个小三角形的对应角相等，对应边的边长之比近似地等于 $|f'(z_0)|$, 所以这两个小三角形近似地相似。

我们注意到 (7.3) 式可近似地写成

$$|\omega-\omega_0| = |f'(z_0)||z-z_0|,$$

从而 $\omega=f(z)$ 也可将很小的圆 $|z-z_0|=\delta$ 近似地映成 (ω) 平面内的圆 $|\omega-\omega_0|=|f'(z_0)|\delta$。

通过例 7.2, 我们大致可以理解为什么把在区域 D 内导数处处不为零的函数 $\omega=f(z)$ 称为是共形映射。

§7.2 单叶解析函数与共形映射 *

在 §7.1 中, 我们说明了: 若 $\omega=f(z)$ 在 D 内解析且 $f'(z)\neq 0,\ \forall z\in D$, 则 $\omega=f(z)$ 是 D 内的一个共形映射。由此便引出一个很自然的问题: 在什么时候，$f'(z)\neq 0,\ \forall z\in D$? 为此，我们在这一节中引入所谓单叶函数的概念如下:

定义 7.2 设 $\omega=f(z)$ 是区域 D 内的解析函数。若对 D 中的任意两个不相同的点 z_1, z_2 有 $f(z_1)\neq f(z_2)$ (即 $f(z)$ 是一对一的), 则称 $\omega=f(z)$ 是 D 内的单叶函数。

例 7.3 $\omega=z^2$ 是区域 $\mathrm{Re}\,z>0$ 内的单叶函数，它在此区域内共形; $\omega=\dfrac{1}{z}$ 是区域 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 内的单叶函数，它在此区域内也是共形的。

为了揭示单叶函数与共形映射的关系，我们首先证明下面的定理:

定理 7.2 设 $\omega=f(z)$ 在 D 内解析。取 $\omega_0\in\mathbf{C}$ 使得 z_0 是 $f(z)-\omega_0$ 的 p 级零点。则对于充分小的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\omega\in U(\omega_0,\delta)$ 时， $f(z)$ 在 $U(z_0,\delta)$ 内有且只有 $f(z)-\omega$ 的 p 个一级零点。

证明: 由 $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ 可知， $f(z)$ 不恒为常数，从而 $f'(z)\neq 0$。根据解析函数零点的孤立性，对于充分小的 ϵ, 可使 $f(z)-\omega_0$ 及 $f'(z)$ 在 $\overline{U(z_0,\epsilon)}$ 上除了 z_0 点外无其它的零点。于是 $\mu=\min\limits_{|z-z_0|=\epsilon}|f(z)-\omega_0|>0$。于是，对 $\omega\in U(\hat{\omega}_0,\mu)$ 及 $z\in\partial U(z_0,\epsilon)$ 有

$$|f(z)-\omega| = |f(z)-\omega_0+\omega_0-\omega|$$
$$|f(z)-\omega_0| \geq \mu > |\omega-\omega_0|。$$

故由儒歇定理得到， $f(z)-\omega$ 与 $f(z)-\omega_0$ 在 $U(z_0,\epsilon)$ 内的零点个数相同，都为 p。又因为 $\omega\neq\omega_0$, 故在 $U(z_0,\epsilon)$ 内， $f(z)-\omega$ 的零点 z_1 与 z_0 不相等，从而， $f'(z_1)\neq 0$, 即 $f(z)-\omega$ 在 $U(z_0,\epsilon)$ 内的零点都是一级的。 □

推论 7.2 设 $\omega=f(z)$ 在区域 D 内解析且不为常数，则 $\mathcal{R}=f(D)$ 也是区域。

证明: 任取 $w_0\in R$, 则存在 $z_0\in D$ 使得 $\omega_0=f(z_0)$。于是由定理 7.2, 存在 $\rho>0$, 使得对于任何 $\omega\in U(\omega_0,\rho)$, 都有一个 $z\in D$ 使得 $\omega=f(z)$, 故 $U(\omega_0,\rho)\subset\mathcal{R}$, 即 $\mathcal{R}$ 是开集。

设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$, 则有 $z_1, z_2 \in D$ 使得 $\omega_j = f(z_j)$, $j = 1, 2$。由于 D 是区域，故可以找到 D 内的一条折线 L: $z = z(t)$, $a \le t \le b$ 使得 $z_1 = z(a)$, $z_2 = z(b)$。由于 $f(z)$ 在 D 内解析，所以

$$\Gamma: \omega = \omega(t) = f(z(t)),\quad t \in [a, b]$$

是 $\mathcal{R}$ 中连接 ω_1, ω_2 的一条按段光滑的曲线。注意到 $\mathcal{R}$ 是开集，我们在对曲线 Γ 用有限覆盖定理后，就能找到一条在 $\mathcal{R}$ 中连接 ω_1 及 ω_2 的折线，这就证明了 $\mathcal{R}$ 是连通的。 □

下面的定理揭示了单叶函数与共形映射的密切关系：

定理 7.3 *设 $\omega = f(z)$ 在区域 D 内解析。若 $f(z)$ 在 D 内是单叶函数，则 $f'(z) \ne 0$, $\forall z \in D$; 反之，若有 $z_0 \in D$ 使得 $f'(z_0) \ne 0$, 则存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$, 使得 $f(z)$ 在 $U(z_0)$ 内是单叶函数。*

证明： 若有 $z_0 \in D$, 使得 $f'(z_0) = 0$, 则 z_0 至少是 $f(z)$ 的二级零点。于是由定理 7.2 可知，存在 $\rho > 0$ 使得对于 $\omega \in U(\hat{0}, \rho)$, $f(z) - \omega$ 在 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$ 内至少有两个零点，这就与 $f(z)$ 在 D 内单叶矛盾。所以， $f'(z) \ne 0$, $\forall z \in D$。

现设 $f'(z_0) \ne 0$, 于是 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的一级零点。从而由定理 7.2, 对于充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\mu > 0$ 使得对任何 $\omega \in U(f(z_0), \mu)$, 在 $U(z_0, \rho)$ 中有且只有一个 z 使得 $f(z) = \omega$。又由于 $f(z)$ 在 z_0 点连续，故对上述的 μ, 存在 $\delta < \rho$, 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - f(z_0)| < \mu$, 即当 $z \in U(z_0, \delta)$ 时， $f(z) \in U(f(z_0), \mu)$。所以当 $z_1, z_2 \in U(z_0, \delta)$ 且 $z_1 \ne z_2$ 时， $f(z_1) \ne f(z_2)$, 即 $f(z)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内是单叶的。 □

§7.3 分式线性映射

形如 $\omega = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ 的函数，其中 a, b, c, d 是复常数而且 $ad - bc \ne 0$, 称为分式线性映射。分式线性映射是一类重要的函数，它在研究共形映射的一般理论及在构造一些简单区域上的共形映射时，起着很重要的作用。

一、分式线性映射的分解及其共形性

从分式线性映射

$$\omega = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0 \tag{7.4}$$

来看，当 $c = 0$ 时， $\omega = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$, 这种类型的映射称为线性映射；当 $a = d = 0$ 时， $\omega = \dfrac{b}{z}$, 这种类型的映射称为反演映射。由此可以看出，分式线性映射包含了下面的四种特殊类型的映射，它们是：

(1) $\omega = z + \alpha$, （α 为复数），（平移）

(2) $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$, ($\theta$ 为实数), (旋转)

(3) $\omega = rz$, (r 为正数), (相似)

(4) $\omega = \frac{1}{z}$, (反演)。

类型 (1), (2), (3) 的映射如图 7-5 所示。

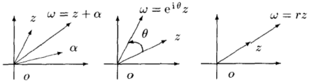


图 7-5

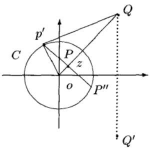


图 7-6

类型 (4) 的映射 $\omega = \frac{1}{z}$ 的点的对应关系可以用下面的方法给出。

如图 7-6 所示，设 $|z| < 1$, C 为 (z) 平面内的单位圆周，圆心为坐标原点 O。设 z 为向量 $\overrightarrow{OP}$。过 P 点作垂线 L, L 与 C 的交点为 P' 及 P''。连接 OP', 然后在 P' 作 OP' 的垂线 L', 再延长 OP, 使与 L' 交于 Q 点。通过直角三角形 $OP'P$ 与直角三角形 OQP' 相似，可以得到 $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = 1$。由于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 方向相同，故

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}|\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}。$$

取 Q 关于实轴的对称点 Q', 则 $\overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{z}$, 即 $\omega = \frac{1}{z}$ (参见图 7-6)。

反过来，给出一个分式线性映射 $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, 我们可将它写成下面的形式

$$\omega = \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} \tag{7.5}$$

令 $\xi = cz + d$, $\eta = \frac{1}{\xi}$, 则 (7.5) 式化为

$$\omega = \left(b - \frac{ad}{c}\right)\eta + \frac{a}{c},$$

而这个线性映射是上述 (1), (2), (3) 这三种类型的复合，于是 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 是上述四种类型映射的复合。这样，对于分式线性映射的讨论可化为对于四种类型映射的讨论。

由 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 可得 $z = \dfrac{-d\omega+b}{c\omega-a}$, 即分式线性映射的逆映射仍是分式线性映射。

现设 $\omega = \dfrac{a_1\xi+b_1}{c_1\xi+d_1}$, $\xi = \dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$。这两个分式线性映射复合之后为

$$\omega = \frac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1} = \frac{az+b}{cz+d}$$

其中， a,b,c,d 四个数由下面的 2 阶方阵给出：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

因此， $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, 于是 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 仍为分式线性映射。

从以上的讨论可以看出，分式线性映射 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 实际上可与复数域 $\mathbf{C}$ 上的 2 阶非奇异方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 一一对应，而且它的逆映射对应 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆阵，它们的复合为这种可逆阵的乘积。

二、分式线性映射的几何性质

由 (1), (2), (3) 这三种类型的映射复合而成的映射 $\omega = kz+h\ (k\neq 0)$ 称为线性映射。对于 $\omega = kz+h$, 由于 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} = k \neq 0$, 故它在 $\mathbf{C}$ 内是共形的；又当 $z=\infty$ 时， $\omega=\infty$, 这时我们要考虑分式线性映射

$$\eta = \frac{1}{k\dfrac{1}{z}+h} = \frac{z}{k+hz} \tag{7.6}$$

在 $z=0$ 处是否具有共形性。由于 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \dfrac{1}{k} \neq 0$, 故 (7.6) 式在 $z=0$ 处具有共形性。综上所述， $\omega = kz+h$ 在扩充复平面 $\mathbf{C}^+$ 上是共形的。

对于反演变换 $\omega = \dfrac{1}{z}$, 由于 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{z^2}$, 故它在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 内是共形的；另一方面，当 $z=\infty$ 时， $\omega=0$, 而 $\omega = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{-1} = z$ 在 $z=0$ 处共形；又当 $z=0$ 时， $\omega=\infty$, 而 $\dfrac{1}{\omega} = z$ 在 $z=0$ 处共形。于是， $\omega = \dfrac{1}{z}$ 在 $\mathbf{C}^+$ 上也是共形的。

由于分式线性映射是由线性映射与反演映射复合而成的，故我们有

性质 7.1 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的函数，而且具有共形性。

由于线性映射 $\omega = kz + h\ (k \neq 0)$ 是将 (z) 平面内的一点经过平移、旋转和相似变换而得到像点的，因此，(z) 平面内的一个圆周或一条直线经过映射 $\omega = kz + h$ 所得的像曲线仍为一个圆周或一条直线。如果我们把直线看成是半径为无穷大的圆周的话，则这个映射在扩充复平面上把圆周映成圆周。这个性质称为保圆性。

下面我们再证明 $\omega = \dfrac{1}{z}$ 也具有保圆性。首先考虑直线

$$L:\quad \overline{A}z + A\overline{z} + C = 0, \tag{7.7}$$

(见例 1.4), 其中 C 为实数。以 $z = \dfrac{1}{\omega}$ 代入 (7.7) 式得：

$$C\overline{\omega}\omega + \overline{A}\overline{\omega} + A\omega = 0。 \tag{7.8}$$

当 $C = 0$ 时，(7.8) 式退化为直线方程；当 $C \neq 0$ 时，(7.8) 式可化为

$$\left|\omega + \frac{\overline{A}}{C}\right| = \frac{|A|}{|C|},$$

即为圆方程。现设圆方程为 $|z - z_0| = R$。将 $z = \dfrac{1}{\omega}$ 代入之，得：

$$(R^2 - |z_0|^2)\overline{\omega}\omega + z_0\omega + \overline{z}_0\overline{\omega} - 1 = 0。 \tag{7.9}$$

当 $R = |z_0|$ 时，(7.9) 式退化为直线方程；当 $R \neq |z_0|$ 时，(7.8) 式化为

$$\left|\omega + \frac{\overline{z}_0}{R^2 - |z_0|^2}\right| = \frac{R}{|R^2 - |z_0|^2|},$$

它也是一个圆方程。

综上所述，$\omega = \dfrac{1}{z}$ 具有保圆性，进而我们得到：

性质 7.2 分式线性映射将扩充 (z) 平面上的圆周映成扩充 (ω) 平面上的圆周，即具有保圆性。

设 L 是 $\mathbf{C}$ 内一条直线，z_1, z_2 是不在 L 上的两个复数。称 z_1, z_2 关于 L 对称，如果 $|z_1 - z| = |z_2 - z|$, $\forall z \in L$。现将 L 换成圆周 C: $|z - z_0| = R$, 则 z_1, z_2 关于 C 对称是指：

$$\operatorname{Arg}(z_1 - z_0) = \operatorname{Arg}(z_2 - z_0) \quad 且 \quad |z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2。 \tag{7.10}$$

我们特别规定，圆心 z_0 和 ∞ 关于 C 对称。由 (7.10) 式可知，z_1, z_2 关于 C 对称当且仅当 $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)} = R^2$。进一步，由对称点的定义及切割线定理易知，$z_1, z_2$ 关于圆 C (C 可以是直线) 对称的充要条件是通过 z_1, z_2 的圆 (或直线) 都与 C 正交 (图 7–7)。

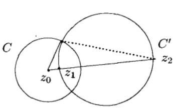


图 7–7

设 $\omega = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 为分式线性映射。在扩充 (z) 平面上，设 z_1, z_2 关于圆 C（C 可以是直线）对称，并设 $\omega_j = f(z_j)$, $j=1,2$, $C^* = f(C)$。设 Γ^* 为在扩充 (ω) 平面上通过 ω_1, ω_2 上任意一个圆（或直线），则 $\Gamma = f^{-1}(\Gamma^*)$ 是通过 z_1, z_2 的圆或直线。由于 z_1, z_2 关于 C 对称，故 C 与 Γ 正交，再由分式线性映射的保圆性得到，C^* 与 Γ^* 正交，故 ω_1, ω_2 关于圆 Γ^* 对称。这样，我们就证明了：

性质 7.3 *设分式线性映射 $\omega = f(z)$ 在扩充 (z) 平面上将圆 C 映成为扩充 (ω) 平面上的圆 C^*，则它将关于 C 的对称点 z_1, z_2 映成为关于 C^* 的对称点 $\omega_1 = f(z_1), \omega_2 = f(z_2)$。*

三、确定分式线性映射的条件

在分式线性映射 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 中含有 a, b, c, d 四个常数，如果将它们中的一个去除此映射的分子和分母，就可将此分式线性映射中的四个常数化为三个独立的常数。因此，只要在 (z) 平面内给定三个不同的点 z_1, z_2, z_3 及 (ω) 平面内的三点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 就能够唯一地确定一个分式线性映射，这正是下面的命题：

命题 7.1 *在扩充 (z) 平面上任意给定三个相异的点 z_1, z_2, z_3 及在扩充 (ω) 平面上任意给定三个相异点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，则就存在唯一的一个分式线性映射 $\omega = f(z)$，使得 $\omega_j = f(z_j)$, $j = 1,2,3$。*

证明： 设分式线性映射为

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0。 \tag{7.11}$$

我们分下面四种情况来考虑。

(1) 设 $z_1 = \infty$, $\omega_1 = \dfrac{a}{c}$, $z_2 = -\dfrac{d}{c}$, $\omega_2 = \infty$。此时，(7.11) 式可化为

$$\omega = \frac{w_1 z + a_1}{z - z_2}。 \tag{7.12}$$

令 $\omega_3 = \dfrac{w_1 z_3 + a_1}{z_3 - z_2}$，并将此式代入 (7.11) 式，得到：

$$\frac{\omega - \omega_1}{1} : \frac{w_3 - \omega_1}{1} = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2}。 \tag{7.13}$$

(2) 设 $z_1 = \infty$, $\omega_1 = \dfrac{a}{c}$ 而 ω_2, ω_3 都不为 ∞。此时，(7.11) 式化为 $\omega = \dfrac{\omega_1 z + b_1}{z + c_1}$。再令

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 z_2 + b_1}{z_2 + c_1}, \quad \omega_3 = \frac{\omega_1 z_3 + b_1}{z_3 + c_1}。$$

从上式中解出 b_1, c_1 后代入 $\omega = \dfrac{\omega_1 z + b_1}{z + c_1}$，可得：

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2}。 \tag{7.14}$$

(3) 若 z_1, z_2, z_3 都不为 ∞ 而 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 中有一个为 ∞，我们可以用讨论 (2) 的方法，对 $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 的逆映射进行同样的讨论，可得出下面的等式：

$$\frac{1}{\omega - \omega_2} : \frac{1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}。 \tag{7.15}$$

(4) 若 z_1, z_2, z_3 及 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 中没有一个为 ∞, 则由 $\omega_j = \dfrac{az_j+b}{cz_j+d}$, $j=1,2,3$ 可推出

$$\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} : \frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}。 \tag{7.16}$$

根据上述 (1) 至 (4) 这四种情况的讨论，我们就证明了命题 7.1 。 □

由 (7.13) 式，(7.14) 式及 (7.15) 式可以看出，在 (7.15) 式的分子或分母中，如果有某一项出现 ∞ 时，把该项置为 1 的话，那么 (7.13) 式，(7.14) 式及 (7.15) 式就全部包含在 (7.16) 式中。

设 z_1, z_2, z_3, z_4 为扩充复平面上四个不同的点，数值

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

称为 z_1, z_2, z_3, z_4 的交比。(7.16) 式说明了，分式线性映射具有保交比不变性。

由命题 7.1 可知，在扩充 (z) 平面及扩充 (ω) 平面上分别给定两个圆周 C, Γ, 然后在 C, Γ 上分别取定三个不同的点，则必能找到一个分式线性映射 $\omega = f(z)$ 把 C 映成 Γ, 但 $\omega = f(z)$ 把 C 的内部映成 (ω) 平面上的什么集合呢？对此，我们有：

命题 7.2 *设 C 是扩充复平面 (z) 上的圆周，$\omega = f(z)$ 是分式线性映射，而 $\Gamma = (C)$ 是扩充 (ω) 平面上的圆周。*

(1) *设 z_0 为 C 内部任意一点。若 $f(z_0)$ 在 Γ 的内部，则 $\omega = f(z)$ 将 C 的内部映成 Γ 的内部；若 $f(z_0)$ 在 Γ 的外部，则 $f(z)$ 将 C 的内部映成 Γ 的外部；*

(2) *若 C 上有三点 z_1, z_2, z_3, Γ 上有三点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 使得 $\omega_j = f(z_j)$, $j = 1,2,3$, 而且当 C 依方向 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 绕行时，Γ 依方向 $\omega_1 \to \omega_2 \to \omega_3$ 绕行，那么 $\omega = f(z)$ 就将 C 的内部映成 Γ 的内部；当 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 绕行方向与 z_1, z_2, z_3 不一致时，$f(z)$ 则将 C 的内部映成 Γ 的外部。*

证明：(1) 设 $f(z_0)$ 在 Γ 的内部。在 C 的内部取异于 z_0 的点 z_1 并设 $\omega_0 = f(z_0), \omega_1 = f(z_1)$。下面证明 ω_1 必在 Γ 的内部。

不然，设 ω_1 在 Γ 的外部。由于 $\omega = f(z)$ 将直线段 z_0z_1 映成圆弧 $\widehat{\omega_0\omega_1}$ (或直线段)，而 ω_0 在 Γ 的内部，ω_1 在 Γ 外部，故 $\widehat{\omega_0\omega_1}$ 必与 Γ 相交，设交点为 ω_2。于是在 C 上及在 $\overline{z_0z_1}$ 上分别有两个点被同时映射到一个点 ω_2, 这与分式线性映射的一一对应性相矛盾，所以，ω_1 在 Γ 的内部 (参见图 7–8) 。这说明，$f(z)$ 将 C 的内部映成 Γ 的内部。

同理可证，当 $f(z_0)$ 在 Γ 外部时，$f(z)$ 将 C 的内部映成 Γ 的内部。

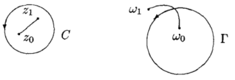


图 7–8

(2) 在过 z_1 的半径上取一点 z_0。由分式线性映射的保角性可知，线段 z_1z 在 $\omega = f(z)$ 下的像 $\widehat{\omega_1\omega}$ 必与 Γ 正交。于是，再由分式线性映射的保角性质，当 $z_1, z_2\, z_3$ 与 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的绕向相同时，ω 必在 Γ 内；相反时，必在 Γ 外 (如图 7–9 所示)。 □

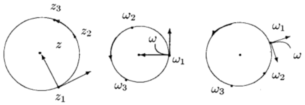


图 7–9

由于分式线性映射具有保圆性、保对称点不变性及保角性，因此，在处理边界由圆周、圆弧、直线及直线段所组成的区域的共形映射问题时，它起着十分重要的作用。

四、例题

现在，我们用前面所述的分式线性映射的性质来求圆域到圆域的共形映射。

例 7.4 求将上半平面 $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ 映成单位圆域 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射。

解: (解一) 如图 7–10 所示，将 (z) 平面上的实轴看成是半径为无穷大的一个圆周，它的内部是上半平面。在实轴上任取三点： $z_1 = -1, z_0 = 0, z_3 = 1$ 使它们依次对应于 $|\omega| = 1$ 上的三点： $\omega_1 = 1, \omega_2 = \mathrm{i}, \omega_3 = -1$。由于 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 与 $\omega_1 \to \omega_2 \to \omega_3$ 的绕向相同，故由 (7.16) 式及命题 7.2 得到所求的分式线性映射应满足

$$\frac{\omega-1}{\omega-\mathrm{i}} : \frac{-1-1}{-1-\mathrm{i}} = \frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0},$$

化简后，得到 $\omega = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\,z-1}$。

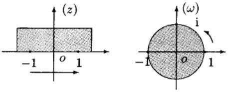


图 7–10

(解二) 由性质 7.2, 可以找到一个分式线性映射 $\omega = f(z)$ 将 $\mathrm{Im}\,z = 0$ 映成 $|\omega| = 1$。设此映射将 $\mathrm{Im}\,z > 0$ 上一点 λ 映成 $|\omega| = 1$ 的圆心 $\omega = 0$。

由于 λ 关于实轴的对称点为 $\overline{\lambda}$, 0 关于 $|\omega|=1$ 的对称点为 ∞, 从而由性质 7.3 可知, $f(\lambda)=0, f(\overline{\lambda})=\infty$。于是 $\omega=f(z)$ 应具有下列形式

$$\omega=f(z)=K\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}} \tag{7.17}$$

其中 K 为常数。由于实轴上的点 z 对应着 $|\omega|=1$ 上的点, 而当 $\operatorname{Im}z=0$ 时, $\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}}\right|=1$, 故由 (7.17) 式得到 $|K|=1$, 即 $K=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 这里 θ 是任意实数。所以, 所求的分式线性映射的一般形式为

$$\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}},\quad \operatorname{Im}\lambda>0。$$

在 (解一) 中, 当 z_1, z_2, z_3 及 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 取不同点时, 所得到的分式线性映射必不相同; 在 (解二) 中, 当 θ 取不同数时, 也会得到不同的分式线性映射。这些都说明了从 $\operatorname{Im}z>0$ 到 $|\omega|<1$ 的分式线性映射是很多的。

例 7.5 试求将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映成圆域 $|\omega-\omega_0|<R$ 的分式线性映射 $\omega=f(z)$, 使得 $f(\mathrm{i})=\omega_0$, $f'(\mathrm{i})>0$。

解: 由于 $\omega=f(z)$ 具有保对称点不变性, 而 i 关于实轴的对称点为 $-\mathrm{i}$, ω_0 关于 $|\omega-\omega_0|=R$ 的对称点为 ∞, 故 $\omega=f(z)$ 具有形式

$$\omega=f(z)=K\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}+\omega_0,$$

其中 K 是常数。由于

$$\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\mathrm{i}}=\left.\frac{2K\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}\right|_{z=\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}K}{2}>0$$

$$R=|\omega-\omega_0|=|K|\left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right|=|K|,\quad \operatorname{Im}z>0,$$

于是有 $\omega=\mathrm{i}R\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}+\omega_0$。

例 7.6 求将单位圆域 $|z|<1$ 映成单位圆域 $|\omega|<1$ 的分式线性映射 (如图 7–11 所示)。

解: 设 (z) 平面上单位圆域 $|z|<1$ 内部的一点 α 被分式线性映射 $\omega=f(z)$ 映成 $|\omega|<1$ 的中心 $\omega=0$。由于 α 关于 $|z|=1$ 的对称点为 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, 0 关于 $|\omega|=1$ 的对称点为 ∞, 而 $\omega=f(z)$ 具有保对称点不变性, 故 $f(\dfrac{1}{\overline{\alpha}})=\infty$, 从而 $\omega=f(z)$ 具有如下的形式

$$\omega=K\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}}=K'\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$

其中 $K'=-\alpha K$ 是常数。

由于当 $|z|=1$ 时, $|\omega|=1$, 所以

$$1=|\omega|=|K|\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|=|K'|,\quad |z|=1,$$

即 $K'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, 于是将 $|z|<1$ 映成 $|\omega|<1$ 的分式线性映射为 $\omega=\mathrm{e}^{i\phi}\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$。

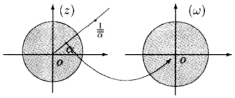


图 7–11

例 7.7 试求将 $|z|<1$ 映成 $|\omega|<1$ 的分式线性映射 $\omega=f(z)$ 且 $f(a)=a$, $f'(a)=k$, 其中 $0<|a|<1$。

解: 设分式线性映射 $\eta_1=f_1(z)$ 将 $|z|<1$ 映成 $|\eta|<1$ 且 $f_1(a)=0$; 再设分式线性映射 $\eta=f_2(\omega)$ 将 $|\omega|<1$ 映成 $|\eta|<1$ 且 $f_2(a)=0$。于是，分式线性映射

$$\omega=f(z)=\left(f_2^{-1}\circ f_1\right)(z)$$

将 $|z|<1$ 映成 $|\omega|<1$ 且 $f(a)=a$。

现取 $\eta=f_1(z)$, $\eta=f_2(\omega)$ 分别为

$$\eta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\quad \eta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\frac{\omega-a}{1-\overline{a}\omega},$$

则 $\omega=f(z)$ 由下式给出:

$$\frac{\omega-a}{1-\overline{a}\omega}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}。\tag{7.18}$$

对 (7.18) 式两边同时关于 z 求导并利用 $f'(a)=k$ 及 $f(a)=a$ 得到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=k$。将此代入 (7.18) 式，即得到所求的分式线性映射。

§7.4 几个初等函数所构成的共形映射

一、幂函数

幂函数 $\omega=z^n$ $(n\geq 2)$ 在 (z) 平面内是处处可导的，其导数为 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1}$。因此，在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 内， $\omega=z^n$ 是共形映射。

为了讨论 $\omega=z^n$ 的性质，我们令

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \omega=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\phi<2\pi,$$

则 $\rho=r^n$, $\phi=n\theta$。由此可见，在 $\omega=z^n$ 的映射下， (z) 平面上的圆周 $|z|=r$ 映成 (ω) 平面上的圆周， $|\omega|=r^n$, 特别是将 $|z|=1$ 映成 $|\omega|=1$; 射线 $\theta=\theta_0$ 映成射线 $\rho=n\theta_0$; 正实轴 $\theta=0$ 映成正实轴 $\phi=0$; 角形域 $0<\theta<\theta_0$ $(<\dfrac{2\pi}{n})$ 映成 (ω) 平面内的角形域

$0<\phi<n\theta_0$。于是，当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{n}$ 时，$\omega=z^n$ 将角形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{n}$ 映成上半平面 $\operatorname{Im}\omega>0$；当 $\theta_0=\dfrac{2\pi}{n}$ 时，$\omega=z^n$ 将角形域 $0<\theta<\dfrac{2\pi}{n}$ 映成 (ω) 平面上挖去原点及正实轴的区域（图 7–12）。

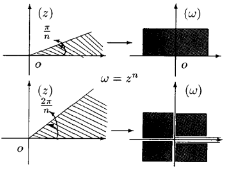


图 7–12

例 7.8 试将角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ 映成 $|\omega|<1$ 使得 $1+\mathrm{i}, 0$ 分别映成 0, 1 的共形映射。

解：如图 7–13 所示，$\xi=z^2$ 将 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ 映成上半平面 $\operatorname{Im}\xi>0$，同时将 $z=1+\mathrm{i}$ 及 0 分别映成 $\xi=2\mathrm{i}, 0$。

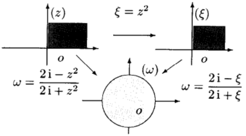


图 7–13

现在求 (ξ) 平面到 (ω) 平面的分式线性映射 $\omega=f(\xi)$ 使得 $f(2\mathrm{i})=0$, $f(0)=1$。根据例 7.4, $\omega=f(\xi)$ 可取为 $\omega=K\dfrac{\xi-2\mathrm{i}}{\xi+2\mathrm{i}}$。由于当 $\xi=0$ 时，$\omega=1$, 故 $K=-1$, 从而所求的分式线性映射为 $\omega=\dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z^2+2\mathrm{i}}$。

二、指数函数

指数函数 $\omega=\mathrm{e}^z$ 在 $\mathbf{C}$ 内处处可导而且 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}=\mathrm{e}^z\neq 0$, 于是 $\omega=\mathrm{e}^z$ 是全平面内的共

形映射。

设 $z=x+\mathrm{i}y$, $\omega=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $0<\phi<2\pi$, 则由 $\omega=\mathrm{e}^{z}$ 得到，

$$\rho=\mathrm{e}^{x},\quad \phi=y。$$

由此可知：(z) 平面上的直线 $x=$ 常数，被映成 (ω) 平面上的圆周 $\rho=$ 常数；而直线 $y=$ 常数，被映成射线 $\phi=$ 常数。于是，$\omega=\mathrm{e}^{z}$ 将 $0<\mathrm{Im}\,(z)<\pi$ 映成上半平面 $\mathrm{Im}\,(\omega)>0$; $\omega=\mathrm{e}^{z}$ 将 $0<\mathrm{Im}\,(z)<2\pi$ 映成 (ω) 平面内挖去原点及正实轴的区域 (图 7–14)。

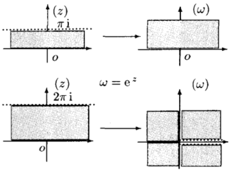


图 7.14

例 7.9 求把带形区域 $a<\mathrm{Re}\,(z)<b$ 映成上半平面 $\mathrm{Im}\,(\omega)>0$ 的一个共形映射。

解: 带形区域 $a<\mathrm{Re}\,(z)<b$ (图 7–15 (a)) 在平移、放大及旋转的映射

$$\xi=\frac{\pi\mathrm{i}}{b-a}(z-a)$$

下变成带形区域 $0<\mathrm{Im}\,(\xi)<\pi$ (图 7–15 (b))。
再利用映射 $\omega=\mathrm{e}^{\xi}$ 就可把带形域 $0<\mathrm{Im}\,(\xi)<\pi$ 映成上半平面 $\mathrm{Im}\,(\omega)>0$ (图 7–15 (c))。所以，所求的共形映射为

$$\omega=\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{b-a}(z-a)\right)。$$

§7.5　黎曼映射定理简介 *

§7.3 中所讨论的映射都是将一些特殊的单连通区域映成特殊的单连通区域的共形映射，而下面的黎曼映射定理则可以给出一个单连通区域到另一个单连通区域间的共形映射。定理如下：

定理 7.4 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中不是整个 $\mathbf{C}$ 的单连通区域，z_0 是 Ω 中一点。则存在 Ω 内唯一的一个单叶解析函数 $f(z)$ 使得 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ 且将 Ω 映成单位开圆盘 $|\omega|<1$。

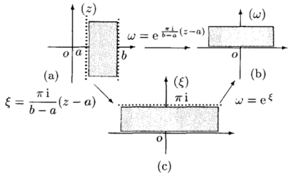


图 7–15

由此可知，黎曼映射定理的重要性在于，我们可将一般单连通区域内所讨论的问题转化为在单位圆盘内进行讨论。从定理 7.4 我们可以看到，虽然 $f(z)$ 将 Ω 映到 $|\omega| < 1$，但是否将 $\partial\Omega$ 映到 $|\omega| = 1$ 却没有指明。这类问题，在共形映射理论中被称为是共形映射的边界对应问题。

这类问题的完整叙述需要较多的准备知识，在此我们仅给出当 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是所谓的解析弧时的结果。首先，我们给出解析弧的定义如下：

定义 7.3 *设 C: $z = z(t)$, $a \le t \le b$ 是 $\mathbf{C}$ 中的一条曲线。若对任意 $t_0 \in (a, b)$ 存在一个 $\delta > 0$ 使得在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 内，$z(t)$ 可以展开成一个关于 $(t - t_0)$ 的幂级数*

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n, \qquad c_1 \neq 0,$$

则称 C 为一条解析弧。

由定义 7.3 可知，圆周是一条解析弧。下面的定理给出了共形映射的边界对应性质：

定理 7.5 *设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的一个单连通区域而且 $\partial\Omega$ 是一条解析弧（这样的区域称为解析柯西域），则存在一个 Ω 内的单叶解析函数 $f(z)$，它将 Ω 映成 $|\omega| < 1$，同时 $f(z)$ 在 $\partial\Omega$ 上解析而且 $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in \partial\Omega$。*

习 题 七

1. 求 $\omega = f(z) = z - \dfrac{1}{z}$ 在 $z = 1 - \mathrm{i}$ 处的转动角及伸缩率。

2. 在 $\omega = \dfrac{1}{z}$ 的映射下，试求下列图形的像：

   (1) 平行于坐标轴的直线 $\mathrm{Re}\, z = x_0$, $\mathrm{Im}\, z = y_0$;

   (2) 带形区域 $0 < \mathrm{Im}\, z < \dfrac{1}{2c}$;

   (3) 角形区域 $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$;

(4) 双曲线 $x^2-y^2=1$。

3. 试求将 -1, ∞, i 分别变成下列点的分式线性映射：

(1) i, 1, $1+\mathrm{i}$; (2) ∞, i, 1。

4. 试求满足下列条件的将 $\operatorname{Im} z>0$ 映成 $|\omega|<1$ 的分式线性映射 $\omega=f(z)$ ：

(1) $f(\mathrm{i})=0$, $\arg f'(\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $f(1)=1$, $f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

5. 试求把单位圆域映成单位圆域的分式线性映射 $\omega=f(z)$, 并满足条件：

(1) $f(\dfrac{1}{2})=0$, $f(-1)=1$; (2) $f(\dfrac{1}{2})=1$, $\arg f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}$。

6. 求将半平面 $\operatorname{Re} z>a>0$ 映成单位圆域 $|\omega|<1$ 的共形映射。

7. 求将带形区域 $0<\operatorname{Re} z<a$ 映成区域 $\operatorname{Re}\omega>b$ 的共形映射。

8. 试求将角形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 映成 $|\omega|<1$ 使得 $1+\mathrm{i}$, 0 分别映成 0, -1 的共形映射。

9. 试证明： $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 $\operatorname{Im} z>0$ 映成 $\operatorname{Im}\omega>0$ 的充要条件是： a, b, c, d 都是实数而且 $ad-bc>0$。

10. 若 $\omega=f(z)$ 是单位圆内部到单位圆内部的分式线性映射，则

$$\frac{|\mathrm{d}\,\omega|}{1-|\omega|^2}=\frac{|\mathrm{d}\,z|}{1-|z|^2}。$$

第八章　解析函数的三个定理 *

在这一章中，我们将分三节分别讨论解析函数延拓的施瓦兹 (Schwatz) 对称原理、解析函数的詹生 (Jansen) 公式及调和函数的边界值理论。这些内容是前面一些章节中的某些内容的扩展和加深。

§8.1　解析开拓的方法

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，区域 G 真包含 D。若存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析且在 D 内 $F(z)=f(z)$, 则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 G 的解析开拓。这时，我们就说 $f(z)$ 可以解析开拓到 G 内。由推论 4.5 知，解析开拓是唯一的，即若 $F(z), G(z)$ 都是 $f(z)$ 在 G 的解析开拓，则 $F(z)=G(z), \forall\, z\in G$。

下面我们就以

$$f(z)=1+z+z^2+\cdots+, \qquad |z|<1 \tag{8.1}$$

为例，说明如何对 $f(z)$ 来进行解析开拓。

取 $z_0=-\dfrac{1}{2}$, 则

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{(1+\dfrac{1}{2})^2}=\frac{4}{9}$$

$$f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right)=n!\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}。$$

于是，$f(z)$ 可以表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}。 \tag{8.2}$$

显然，(8.1) 和 (8.2) 表示同一个函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$，但我们应该注意到，在 $z=-1$ 时，(8.1) 式不收敛而 (8.2) 式却收敛。也就是说，$f(z)$ 被开拓到原来的收敛圆外的点上去了 (图 8–1) 。

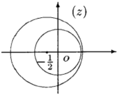


图 8–1

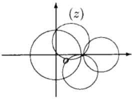


图 8–2

现在我们可以重述上面的过程，选出一新点 z_1，计算 $f^{(n)}(z_1)$，得出一个新的幂级数。

按照上述的方法，我们可将 $f(z)$ 开拓到圆周上含有 $z=1$ 的任意圆盘内部的点 z。这样下去，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z|<1$ 可以解析开拓到除 $z=1$ 外的整个复平面 (图 8–2)。

上面所描述的方法对于一般用幂级数表示的解析函数的解析开拓都是适用的。下面，我们提供另外一种比较直观的解析函数的解析开拓方法，即所谓的施瓦兹对称原理。

定理 8.1 设 AB 为实轴上的一段。作一简单闭曲线 Γ_1 使 AB 为其一部分，其余部分为在上半平面的一条曲线并联接 A 与 B 两点。设 $f(z)$ 在 Γ_1 的内部 D 内解析，在 Γ_1 上连续且在 AB 上取实值。则 $f(z)$ 可解析延拓到 D 关于实轴对称的区域 D' 内。

证明： 如图 8–3, 设 Γ_2 为 Γ_1 关于实轴对称的闭曲线。

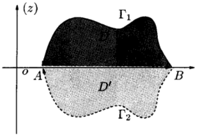


图 8–3

令 $R_1=\Gamma_1\cup D$, $R_2=\Gamma_2\cup D'$, 且

$$\phi(z)=\begin{cases} f(z), & z\in R_1 \\ \overline{f(\bar{z})}, & z\in R_2。\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 在 AB 上取实值，故在 AB 上，$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$。

显然，$\phi(z)$ 在 R_1 内解析。当 z 在 R_2 内部时，取充分小的 h，使 $z+h$ 在 R_2 的内部。于是，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\phi(z+h)-\phi(z)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h})}-\overline{f(\bar{z})}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\overline{\left\{\frac{f(\bar{z}+\bar{h})-f(\bar{z})}{\bar{h}}\right\}} = \overline{f'(\bar{z})}。\end{aligned}$$

所以，$\phi(z)$ 在 R_2 内亦解析。

现在剩下的要证明，$\phi(z)$ 在线段 AB 上除了 A, B 两点外的所有点上都可导。但我们不是直接从导数的定义来证明，而是采用摩瑞拉定理 (见例 3.10) 来证明，$\phi(z)$ 在 $\Omega = D\cap D'\cap(\overline{AB}\backslash\{A, B\})$ 内解析。

设 C 为 Ω 内任意一条正向简单闭曲线。若 C 全部在 R_1 内或全部在 R_2 内，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0;$$

若 C 被 AB 分割成两段简单曲线 C_1 及 C_2，顺次在实轴上方及下方且设 C 在 AB 上所截取的一段弦为 A_1B_1。则 $C_1+A_1B_1$ 及 $C_2+B_1A_1$ 分别在 R_1 及 R_2 内。所以，

$$\oint_{C_1+A_1B_1}\phi(z)\,\mathrm{d}\,z = 0, \quad \oint_{C_1+B_1A_1}\phi(z)\,\mathrm{d}\,z = 0,$$

即得

$$\oint_C \phi(z)\,\mathrm{d}\,z = \oint_{C_1}\phi(z)\,\mathrm{d}\,z + \oint_{C_2}\phi(z)\,\mathrm{d}\,z = 0。$$

同理可证，当 C 被 AB 分割成若干段简单曲线时，也有 $\oint_C \phi(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。于是，由摩瑞拉定理可知 $\phi(z)$ 在 $R_1\cap R_2$ 内解析。这就证明了 $f(z)$ 可以解析开拓穿过 AB，得到了解析函数 $\phi(z)$。 □

§8.2 詹 生 公 式

为了证明詹生公式，我们首先引入下面两个引理：

引理 8.1 *设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的单连通区域，$f(z)$ 在 Ω 内解析且处处不为零。则存在 Ω 内的一个解析函数 $F(z)$ 及常数 C 使得 $f(z) = C\,\mathrm{e}^{F(z)}$，进而 $\ln|f(z)|$ 为调和函数。*

证明：由于 Ω 是单连通的，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 又在 Ω 内解析，所以在取定一点 $z_0\in\Omega$ 后，

$$F(z) = \int_{z_0}^{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z, \quad z\in\Omega$$

在 Ω 内解析且 $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ (定理 3.5)。

令 $h(z)=f(z)\mathrm{e}^{-F(z)}$。则 $h'(z)=0$, 从而 $h(z)=h(z_0)=f(z_0)=C\ \forall z\in\Omega$, 即 $f(z)=C\,\mathrm{e}^{F(z)}$。

由于 $F(z)$ 的实部是 $\ln|f(z)|$, 故由命题 3.3 得到， $\ln|f(z)|$ 是调和函数。 □

引理 8.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\mathrm{d}\theta=0$。

证明： 设 $\Omega=\{z\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Re}\,(z)<1\}$。由于 Ω 是单连通区域且 $1-z\neq 0,\forall z\in\Omega$，将引理 8.1 应用于函数 $f(z)=1-z$ 并设 $z_0=0$，则有 Ω 内的解析函数 $F(z)$ 使得 $1-z=\mathrm{e}^{F(z)}$ 并且 $F(0)=0$。于是， $\mathrm{Re}\,(F(z))=\ln|1-z|$。

设 ϵ 为任意小的正数，作两个正向圆周

$$C_\epsilon:\ z=z_1(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ \epsilon\le t\le 2\pi-\epsilon,\quad \Gamma_\epsilon:\ z=z_2(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ -\epsilon\le t\le\epsilon。$$

则由柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\epsilon}\frac{F(z)}{z}\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{F(z)}{z}\,\mathrm{d}z=F(0)=0$$

可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon}F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}z, \tag{8.3}$$

所以，由 (8.3) 式得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t&=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon}\mathrm{Re}\,(F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))\,dt\\&=-\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{Re}\,(F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))\,\mathrm{d}t\\&=-\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\ln\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{\epsilon}\ln\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t。\end{aligned} \tag{8.4}$$

注意到，在 $0\le t\le\epsilon<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $1\ge\sin\dfrac{t}{2}\ge\dfrac{2}{\pi}\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{\pi}$，故

$$\epsilon\ln\epsilon-\epsilon-\epsilon\ln\pi\le\int_0^\epsilon\ln\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\le0。 \tag{8.5}$$

最后，结合 (8.4) 式及 (8.5) 式，可得到 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t=0$ 。 □

下面，我们就来叙述并证明下面的詹生公式。

定理 8.2 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析。对于 $0<r<R$, 设 $a_1,\cdots a_n$ 为 $f(z)$ 在 $|z|\le r$ 上按重数计算的所有互不相同的零点。如果 $f(0)\neq0$, 则

$$\ln|f(0)|=-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{r}{|a_k|}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}\theta。$$

证明：设 $a_1,\cdots,a_N$ 在 $|z|<r$ 内，而 $a_{N+1},\cdots,a_n$ 在 $|z|=r$ 上。

由例 7.6 可知，当 $|b|<1$ 时，映射 $\omega=\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}$ 将 $|z|<1$ 映成 $|\omega|<1$ 同时也将边界映成边界，于是

$$\omega=\frac{\dfrac{z}{r}-\dfrac{a_k}{r}}{1-\dfrac{\overline{a}_k}{r}\dfrac{z}{r}}=\frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a}_k z},$$

将 $|z|<r$ 映成 $|\omega|<r$ 并将 $|z|=r$ 映成 $|\omega|=r$。

对于 $|z|<R$ 内不同于 $a_1,\cdots,a_n$ 的点 z，令

$$g(z)=f(z)\prod_{k=1}^{N}\frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a}_k z}\prod_{k=N+1}^{m}\frac{a_k}{z-a_k}。$$

通过补充定义 $g(z)$ 在 $a_1,\cdots,a_n$ 处的函数值，可以认为 $g(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析且在 $|z|=r$ 上没有零点。从而由引理 8.1 可知，$\ln|g(z)|$ 是 $|z|=r$ 上的调和函数，进而由习题 3.16 得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(re^{it})|\,dt=\ln|g(0)|。\tag{8.6}$$

另一方面，由于

$$|g(0)|=|f(0)|\prod_{k=1}^{N}\frac{r}{|a_k|},$$

$$\ln|g(re^{it})|=\ln|f(re^{it})|+\sum_{k=N+1}^{m}\ln\left|\frac{a_k}{re^{it}-a_k}\right|,\tag{8.7}$$

所以，将 (8.7) 式代入 (8.6) 式后，得到：

$$\begin{aligned}\ln|f(0)|=&-\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{r}{|a_k|}+\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{it})|\\&+\sum_{k=N+1}^{n}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{a_k}{a_k-re^{it}}\right|dt。\end{aligned}\tag{8.8}$$

令 $a_k=r_k e^{i\alpha_k}$, $0\le\alpha_k\le 2\pi$, $\rho_k=\dfrac{r}{\alpha_k}$, $k=N+1,\cdots,n$。于是由引理 8.2 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{a_k}{a_k-re^{it}}\right|dt&=-\int_0^{2\pi}\ln|1-\rho_k e^{i(t+\alpha_k)}|\,dt\\&=-\int_{\alpha_k}^{2\pi+\alpha_k}\ln|1-\rho_k e^{it}|\,dt=0。\end{aligned}$$

最后，由 (8.8) 式得到詹生公式。 □

§8.3 圆内调和函数的边界值性质

在第二章的最后一节中，我们证明了圆内调和函数的普阿松公式，即对于在 $|z| \le R$ 内的调和函数 $u(x,y)$ 在 $|z| < R$ 内任何一点 $z = re^{i\theta}$ 处的函数值由下列积分给出：

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2}\,d\theta。\tag{8.9}$$

现在我们考虑反过来的问题，即给出 $|z| = R$ 上的连续函数 $\Phi(Re^{i\phi})$, $(0 \le \phi \le 2\pi)$, 然后在 $|z| < R$ 上定义一个函数

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(Re^{i\phi})\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2}\,d\phi。\tag{8.10}$$

我们问：由 (8.10) 式定义的函数 $u(z)$ 是否在 $|z| < R$ 内调和并且是否对 $|z| = R$ 上的任意一点 ξ 有 $\lim\limits_{z\to\xi} u(z) = \Phi(\xi)$?

对于第一个问题，由于通过参数变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

可以建立起等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

因此，利用含参变量积分的求导公式 (见附录一) 对 (8.9) 式分别关于 r, θ 求偏导数，我们就可以得出 $u(x,y)$ 为 $|z| < R$ 内的调和函数的结论。对于第二个问题，我们有下面的定理：

定理 8.3 设 $\Phi(\xi) = \Phi(Re^{i\phi})$ 是 $|\xi| = R$ 上的连续函数，而 $u(z) = u(re^{i\theta})$ $(0 \le r < R,$ $0 \le \theta \le 2\pi)$ 由 (8.10) 式确定，则 $\lim\limits_{z\to\xi} u(z) = \Phi(\xi)$。

证明： 我们首先证明 $\lim\limits_{z\to R} u(z) = \Phi(R)$, $|z| < R$。注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2}\,d\phi &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\left(\frac{Re^{i\phi} + re^{i\theta}}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}}\right)d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\oint_{|\xi|=1}\frac{\xi + z}{\xi - z}\frac{d\xi}{i\xi}\right) = 1,\end{aligned}$$

所以

$$u(re^{i\theta}) - \Phi(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Phi(Re^{i\phi}) - \Phi(R)\right]\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2}\,d\phi。$$

由于 $\Phi(\xi)$ 在 $|\xi| = R$ 上连续，故存在一个常数 $M > 0$ 使得 $|\Phi(\xi) - \Phi(R)| \le m$ 及对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|\xi - R| \le \delta$, $|\xi| = R$ 时， $|\Phi(\xi) - \Phi(R)| < \dfrac{\epsilon}{3}$。取 $\phi_0 \in (0,\pi)$ 使得 $|Re^{i\phi_0} - R| = \delta$。由于

$$|Re^{i\phi} - R| = 2R|\sin\frac{\phi}{2}|,$$

所以，当 $\phi \in (0,\phi_0)$ 或 $\phi \in (2\pi-\phi_0, 2\pi)$ 时，$|Re^{i\phi}-R|<\delta$; 而当 $\phi \in (\phi_0, 2\pi-\phi_0)$ 时，$|Re^{i\phi}-R|>\delta$。

现设

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\phi_0}\left[\Phi(Re^{i\phi})-\Phi(R)\right]\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\right)d\phi,\\
I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0}\left[\Phi(Re^{i\phi})-\Phi(R)\right]\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\right)d\phi,\\
I_3 &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\phi_0}^{2\pi}\left[\Phi(Re^{i\phi})-\Phi(R)\right]\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\right)d\phi。
\end{aligned}
$$

则 $|I_1|<\dfrac{\epsilon}{3}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\right)d\phi<\frac{\epsilon}{3}$, $\quad |I_3|<\dfrac{\epsilon}{3}$。

设 $z=re^{i\theta}$ 为 $|z|<R$ 内一点且满足 $|z-R|<\dfrac{\delta}{2}$, 则

$$|z-Re^{i\phi}|>|Re^{i\phi}-R|-|z-R|>\frac{\delta}{2}。$$

于是，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}\right)=\frac{R^2-r^2}{|Re^{i\phi}-re^{i\theta}|^2}<\left(\frac{2}{\delta}\right)^2(R^2-r^2),$$

从而，

$$|I_2|<M\frac{2\pi-2\phi_0}{2\pi}\left(\frac{2}{\delta}\right)^2(R^2-r^2)<\frac{\epsilon}{3}。\tag{8.11}$$

取充分小的 η 使得当 $|re^{i\phi}-R|<\eta$ 时，(8.11) 式中的最后一个不等式成立。这样，

$$|u(re^{i\theta})-\Phi(R)|=|I_1+I_2+I_3|\le|I_1|+|I_2|+|I_3|<\epsilon。$$

对于圆周 $|\xi|=R$ 上任意一点 $\xi_0=Re^{i\phi_0}$, 令

$$u_1(z)=u(ze^{i\phi_0}),\ |z|<r,\quad \Phi_1(\xi)=\Phi(ze^{i\phi_0})。$$

于是，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(Re^{i\phi}e^{i\phi_0})\,\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right)d\phi &= \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0}\Phi(Re^{i\phi})\,\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}e^{-i\phi_0}+z}{Re^{i\phi}e^{-i\phi_0}-z}\right)d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(Re^{i\phi})\,\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+e^{i\phi_0}z}{Re^{i\phi}-e^{i\phi_0}z}\right)d\phi\\
&= u_1(z)\qquad(|z|<R)
\end{aligned}
$$

从而由前面所得到的结果，有 $\lim\limits_{z\to R}u_1(z)=\Phi_1(R)$, 故 $\lim\limits_{z\to\xi_0}u(z)=\Phi(\xi_0)$。 □

第九章 平 面 复 势

本章主要介绍解析函数在平面定常向量场的应用。所谓平面向量场，是指这个向量场中的所有向量都与某个平面 π 平行，并且在垂直于这平面 π 的直线上每一点处，场中的向量都彼此相等。如果场中的向量都是与时间无关的，则称之为平面定常向量场（如图 9–1 所示）。显然，只需要了解位于平面 π 中的向量场的分布就可以了。

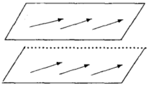


图 9–1

不过在下面的讨论中，当我们提到平面上点 z_0 、曲线 Γ 、区域 D 时，应当想象为空间过点 z_0 与该平面垂直的直线、以 Γ 为准线的直柱面、以 D 为底面的直柱体。

§9.1 平面向量场的基本概念

一、平面向量场的表示法

由于平面向量场中的向量只有两个分量，我们可以利用复数来表示。设有平面向量场 $A = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j}$, 其所在平面取为复平面，由于场中的点可用复数 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 来表示，则场中各点处的向量可用复变函数表示为

$$A = A(z) = A_x(x,y) + A_y(x,y)\,\mathrm{i}。$$

反之，若有一复变函数 $w = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$, 也可作出相应的平面向量场

$$w = u(x,y)\,\mathbf{i} + v(x,y)\,\mathbf{j}。$$

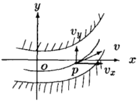


图 9–2

例 9.1 考虑某一江面上水在某时刻的流速场。假定在江面上取定坐标系 xoy, 将江面上任意一点 P 的速度 v 的两个分量记为 $v_x(x,y)$ 与 $v_y(x,y)$, 则有速度向量 $v = v_x(x,y)\,\mathbf{i} + v_y(x,y)\,\mathbf{j}$。它可以用复数

$$v = v_x(x,y) + \mathrm{i}\,v_y(x,y)$$

来表示 (图 9–2)。

一般地，不可压缩 (密度均匀、不随压力改变，不妨设密度 $\rho = 1$) 的流体的平面定常流速场

$$v = v_x(x,y)\,\mathbf{i} + v_y(x,y)\,\mathbf{j}$$

可用复变函数

$$v = v_x(x,y) + \mathrm{i}\,v_y(x,y)$$

来表示。

由于复变函数的产生和发展与流体力学是密不可分的，下面我们将以不可压缩的流速场为例，介绍平面定常向量场中的基本概念。

二、流量与环量

假设不可压缩的流体在复平面上某一区域 D 内流动，$v(z) = v_x(x,y) + \mathrm{i}\,v_y(x,y)$ 表示点 $z \in D$ 处的流速，$v_x(x,y)$ 与 $v_y(x,y)$ 分别表示 $v(z)$ 的水平及垂直流速分量，并且都是连续可微的函数。

设 L 为区域 D 内从点 A 到 B 的正向按段光滑的简单曲线。现在我们考虑流体在单位时间内流过 L 的流体质量，即所谓流量；以及单位时间内流体沿 L 旋转的质量，即所谓环量。为此，在 L 上取弧微元 $\mathrm{d}\,s$，在其上任一点 M 处作单位切向量 τ (与 L 正向相同) 及单位法向量 n (在切向量 τ 右侧) (如图 9–3 所示)。则有

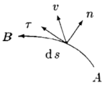


图 9–3

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}, \qquad n = -\mathrm{i}\,\tau = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}。$$

首先，单位时间内流过 $\mathrm{d}\,s$ 的流量应为 $\mathrm{d}\,N = v_n\,\mathrm{d}\,s$，其中 v_n 为 v 在法向量 n 上的投影。于是，单位时间内流体流过 L 的流量为 $N = \displaystyle\int_L v_n\,\mathrm{d}\,s$。若 $v = \{v_x, v_y\}$，$n = \left\{\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}, -\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}\right\}$，利用向量内积运算，有

$$v_n = v \cdot n = v_x\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s} - v_y\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s},$$

所以

$$N = \int_L \left(v_x\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s} - v_y\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s}\right)\mathrm{d}\,s,$$

即

$$N = \int_L v_x\,\mathrm{d}\,y - v_y\,\mathrm{d}\,x。 \tag{9.1}$$

如果 v 与 n 夹锐角，则流量为正。

同样 $\mathrm{d}s$ 上的环量为 $\mathrm{d}\tau = v_\tau \mathrm{d}s$, 于是 L 上的环量为 $\Gamma = \int_L v_\tau \mathrm{d}s$。若 $v=\{v_x, v_y\}$, $\tau = \left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right\}$, 利用向量内积运算，有

$$v_\tau = v\cdot\tau = v_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

所以

$$\Gamma = \int_L \left(v_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s,$$

即

$$\Gamma = \int_L v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y。\tag{9.2}$$

如果 v 与 τ 夹锐角，则环量为正。

我们称 $\Gamma + \mathrm{i}N$ 为复环流，并且由 (9.1) 式及 (9.2) 式可得

$$\Gamma + \mathrm{i}N = \int_L (v_x - \mathrm{i}v_y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_L \overline{v(z)}\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\overline{v(z)}$ 称为复速度。

三、散度与旋度

1. 散度

定义 9.1 设平面向量场 $A = A_x(x,y) + \mathrm{i}A_y(x,y)$, 且 $A_x(x,y)$ 、 $A_y(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则称

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

为向量场 v 的散度，记作

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}。$$

考虑区域 D 内稳定流动的不可压缩的流体速度场 $v(z) = v_x(x,y) + \mathrm{i}v_y(x,y)$,

(1) 如果 $\operatorname{div} v(z_0) > 0$, 则称点 z_0 是"源点"，表示源的强度，此时流体流出大于流入；

(2) 如果 $\operatorname{div} v(z_0) < 0$, 则称点 z_0 是"洞点"，表示洞的强度，此时流体流入大于流出；

(3) 如果 $\operatorname{div} v(z_0) = 0$, 则点 z_0 既不是"源点"，也不是"洞点"，此时流体流出与流入达到平衡；

(4) 在区域 D 内，如果 $\operatorname{div} v = 0$, 则称 v 是 D 内的无源场或管量场。

若在区域 D 内任作一正向简单闭曲线 C, 则此时流体流过 C 的流量为

$$N = \oint_C v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x。$$

利用《高等数学》或《数学分析》中实变量函数积分的格林公式可知：

$$N = \iint_{C(D)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{C(D)} \operatorname{div} v\,\mathrm{d}\sigma,\tag{9.3}$$

其中 $C(D)$ 为 C 所围区域。显然，如果 $N>0$, 表明 $C(D)$ 内有“源点”; 如果 $N<0$, 表明 $C(D)$ 内有“洞点”; 如果 $N=0$, 则表明 $C(D)$ 内即无源又无洞，此时流体的流入与流出达到平衡。

2. 旋度

定义 9.2 设平面向量场 $A=A_x(x,y)+\mathrm{i}\,A_y(x,y)$, 且 $A_x(x,y)$, $A_y(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则称

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

为向量场 A 的旋度，记作 $\operatorname{rot}A$。

考虑区域 D 内稳定流动的不可压缩的流体速度场 $v(z)=v_x(x,y)+\mathrm{i}\,v_y(x,y)$,

(1) 如果 $\operatorname{rot}v(z_0)\neq 0$, 则称点 z_0 是“涡点”;

(2) 如果在区域 D 内， $\operatorname{rot}v=0$, 则称 v 是无旋场或势量场。

若在区域 D 内任作一正向简单闭曲线 C, 则此时流体流过 C 的环量为

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C v_x\,\mathrm{d}\,x+v_y\,\mathrm{d}\,y\\ &= \iint_{C(D)}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\ &= \iint_{C(D)}\operatorname{rot}v\,\mathrm{d}\,\sigma。\end{aligned}\tag{9.4}$$

于是由 (9.3) 式， (9.4) 式，流体在 D 内作无源、无洞、无旋的流动，其充要条件为

$$\Gamma+\mathrm{i}\,N=\int_C\overline{v(z)}\,\mathrm{d}\,z=0,$$

从而，根据第三章的摩瑞拉定理 (例 3.10), $\overline{v(z)}$ 是 D 内的解析函数。

四、复势

定义 9.3 如果在 D 内存在解析函数 $f(z)$, 使 $f'(z)=\overline{v(z)}$, 则称 $f(z)$ 为此函数的复势。

设 D 是单连通区域， $z_0, z\in D$, 则由定理 3.6,

$$f(z)=\int_{z_0}^{z}\overline{v(z)}\,\mathrm{d}\,z。$$

设有一流动的复势 $f(z)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\,\psi(x,y)$, 其中 $\phi(x,y)$ 称为流动的势函数， $\psi(x,y)$ 称为流动的流函数。 $\phi(x,y)=C_1$ 与 $\psi(x,y)=C_2$ (C_1, C_2 分别为常数) 分别称为势线和流线。

由推论 2.6 可知，势线 $\phi(x,y)=C_1$ 与流线 $\psi(x,y)=C_2$ 是相互正交的曲线族。

显然，无源、无洞、无旋的流动，必然存在复势。并且流动的速度 v 与复势的关系 $f(z)$ 为 $v=\overline{f'(z)}$ 从而

$$|v|=|f'(z)|,\qquad \arg v=-\arg f'(z)。$$

由于利用复势求复速度只需用到求导数，并且利用复势可以统一研究流函数与势函数，也容易求得流线与势线，进一步了解流动的情况，因此利用复势来刻画流动更为方便。

例 9.2 设一平面流速场的复势 $f(z) = az$ ($a > 0$ 为实常数)，试求该场的速度、势线和流线。

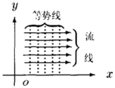


图 9–4

解: 由于 $f'(z) = a$, 所以场中任一点处的速度 $v = \overline{f'(z)} = a$, 即速度向量都平行于实轴，指向正的一方且大小为 a。

势函数 $\phi(x,y) = ax$, 势线为 $x = C_1$,

流函数 $\psi(x,y) = ay$, 流线为 $y = C_2$。

该场的流动图像如图 9–4 所示，它刻画了流体以等速度 a 从左向右流动的情况。

例 9.3 设复势为 $f(z) = z^2$, 试确定其速度、势线及流线。

解: $f'(z) = 2z$, 其速度为 $v(z) = \overline{f'(z)} = 2\overline{z}$。由

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xy\,\mathrm{i},$$

可得

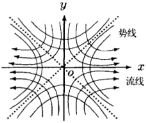


图 9–5

势函数 $\phi(x,y) = x^2 - y^2$,

势线为 $x^2 - y^2 = C_1$;

流函数 $\psi(x,y) = 2xy$,

流线为 $xy = C_2$。

该场的流动图像如图 9–5 所示。

例 9.4 设流动的复势为 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$, 试求沿圆周 $C: |z-1| = \dfrac{1}{3}$ 的流量及环量。

解: 设流量为 N, 环量为 Γ。由于 $z = -1$ 在 C 的外部，故

$$\begin{aligned}\Gamma + \mathrm{i}N &= \int_C f'(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_C \frac{-2z}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_C \frac{-2z}{(z+1)^2(z-1)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{-2z}{(z+1)^2(z-1)^2}, 1\right] = 0,\end{aligned}$$

即得 $\Gamma = 0, N = 0$。

§9.2 面静电场与热力学中的复势

一、平面静电场

设静电场所在平面为复平面，场强向量为

$$E = E_x(x,y) + \mathrm{i}\,E_y(x,y)。$$

根据电学理论，如果场内没有带电体，则静电场即是无源场、又是无旋场。由上节可知，场 E 必有复势。因此利用复势研究平面静电场较为方便，但是与流速场不同的是，静电场问题中使用另外一些记号和术语。下面我们来构造静电场的复势。

由于场 E 是无源场，则有

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0,$$

即

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial y}。$$

由《高等数学》或《数学分析》中的知识可知，在单连通区域内必存在某一二元实函数 $u(x,y)$，使

$$\mathrm{d}\, u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}\, x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}\, y = -E_y \mathrm{d}\, x + E_x \mathrm{d}\, y。$$

故在等值线 $u(x,y) = C_1$ 上，有

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{E_y}{E_x}。 \tag{9.5}$$

(9.5) 式说明在等值线 $u(x,y) = C_1$ 上任一点处，场强向量 E 与等值线相切。于是称此等值线为电力线，此函数 $u(x,y)$ 称为力函数。

又由于场 E 是无旋场，所以

$$\operatorname{rot} E = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

即

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}。$$

从而在单连通区域内必存在某一二元实函数 $v(x,y)$，使

$$\mathrm{d}\, v(x,y) = -E_x \mathrm{d}\, x - E_y \mathrm{d}\, y。$$

于是在等值线 $v(x,y) = C_2$ 上，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{E_x}{E_y}。 \tag{9.6}$$

(9.6) 式说明场强向量 E 与该曲线的法线相同。于是称此等值线 $v(x,y) = C_2$ 为等势线，此函数 $v(x,y)$ 称为势函数。显然，力线与等势线是正交的。

综上所述，如果 E 是单连通区域 D 上的无源无旋场，则力函数 $u(x,y)$ 与势函数 $v(x,y)$ 满足 C–R 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

并且 u, v 是可微的，从而函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ 是一个解析函数，称为平面静电场的复势。

由于

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = -E_y - \mathrm{i}\,E_x = -\mathrm{i}\,(E_x - \mathrm{i}\,E_y) = -\mathrm{i}\,\overline{E},$$

即 $E = -\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}$, 从而有

$$|E| = |f'(z)|, \qquad \operatorname{Arg} E = -\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} f'(z)\right]。$$

场强向量 E 沿简单闭曲线 C 的环量为

$$\Gamma = \int_C E_\tau \,\mathrm{d}\, s = \int_C E_x \mathrm{d}\, x + E_y \mathrm{d}\, y,$$

等于单位电荷沿简单闭曲线移动时场 E 所做的功，并且永远等于 0。

场强向量 E 通过闭曲线 C 的流量为

$$N = \int_C E_n \,\mathrm{d}\, s = \int_C E_x \mathrm{d}\, y - E_y \mathrm{d}\, x,$$

根据著名的高斯 (Gauss) 定理，它等于分布在 C 内部的电荷的代数和乘以 2π。

例 9.5 *求一条具有电荷线密度 q 的均匀带电的无限长直导线 L 所产生的静电场的复势。*

解: 取复平面垂直于 L, 且 L 过原点。由于导线为无限长，因此垂直于复平面的任何直线上各点处的电场强度是相同的，又由于导线上关于复平面对称的两带电微元段所产生的电场强度的垂直分量相互抵消，只剩下与复平面平行的分量。因此，静电场为平面场。

在复平面上任取一点 $P(x,y)$ (即 z 点), 此点处的场强向量为 E。在 L 上任取一微元段 $\mathrm{d}\,h$, 其带电量为 $q\mathrm{d}\,h$。可将电荷 $q\mathrm{d}\,h$ 看作是集中于 L 上点 M 处的点电荷。根据库仑定律，微元段 $\mathrm{d}h$ 在点 P 处产生的场强大小为

$$|\mathrm{d}\,E| = \frac{q\,\mathrm{d}\,h}{r^2 + h^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, h 为点 M 的高度。因为 E 在复平面上，根据电学叠加原理，它的大小等于 $\mathrm{d}\,E$ 在复平面上投影之和，即

$$|E| = \int |\mathrm{d}\,E| \cos\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\cos\phi}{r^2 + h^2} \mathrm{d}\,h$$

其中 θ 为向量 $\mathrm{d}\,E$ 与复平面的夹角。由于 $h = r\tan\theta$, 于是

$$\mathrm{d}\,h = \frac{r\mathrm{d}\,\theta}{\cos^2\theta}, \qquad \frac{1}{r^2 + h^2} = \frac{\cos^2\theta}{r^2}。$$

所以

$$|E| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\cos\theta}{r} \mathrm{d}\,\theta = \frac{2q}{r}。$$

又因为向量 E 的方向与向量 $\overrightarrow{OP} = z$ 的方向相同，于是

$$E = \frac{2q}{r}\,\frac{z}{|z|} = \frac{2qz}{|z|^2} = \frac{2q}{\overline{z}},$$

从而 $f'(z) = -\mathrm{i}\,\bar{E} = -\dfrac{2q\mathrm{i}}{z}$, 所以场 E 的复势为

$$f(z) = 2q\,\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\frac{1}{z} + C。$$

于是，力函数与势函数分别为

$$u(x,y) = 2q\,\mathrm{Arg}\,z + C_1, \qquad v(x,y) = 2q\,\ln\frac{1}{|z|} + C_2。$$

该场的图像如图 9–6 所示。

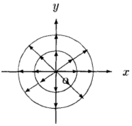


图 9–6

二、在热力学上的应用

设在一个具有均匀导热率 K (常数) 的物体中，热在平行于复平面的所有平面上的分布相同，而且流动状态是定常的，即温度的分布与时间无关。若用 $T(x,y)$ 表示复平面上点 $z = x + iy$ 处的温度，则在该点处的热流向量为

$$\begin{aligned} Q &= -\,K\,\mathrm{grad}\,T(x,y) \\ &= -\,K\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ &= Q_x + \mathrm{i}\,Q_y \end{aligned}$$

如果在某一区域 D 内没有热源，则场 Q 是无源场，有

$$\mathrm{div}\,Q = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0,$$

以 $-\dfrac{1}{K}$ 乘上式再移项可得

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{K}Q_x\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(-\frac{1}{K}Q_y\right)}{\partial y}$$

所以必存在某一二元实函数 $u(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}\,u(x,y) = -\frac{1}{K}Q_y\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{K}Q_x\,\mathrm{d}\,y \tag{9.7}$$

于是在等值线 $u(x,y) = C_1$ 上，有

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Q_y}{Q_x}。$$

上式说明在等值线 $u(x,y) = C_1$ 上任一点处，热流向量 Q 与等值线相切。通常称此等值线为流线，函数 $u(x,y)$ 称为热流函数。

又由于 K 为常数，则场 Q 是无旋场，所以

$$\mathrm{rot}\,Q = \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = 0,$$

以 $-\dfrac{1}{K}$ 乘上式再移项可得

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{K}Q_y\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{K}Q_x\right)}{\partial y}$$

从而必存在某一二元实函数 $v(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}\,v(x,y)=-\frac{1}{K}Q_x\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{K}Q_y\,\mathrm{d}\,y \tag{9.8}$$

于是在等值线 $v(x,y)=C_2$ 上，有

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}=-\frac{Q_x}{Q_y}。$$

因而在等值线 $v(x,y)=C_2$ 上任一点处，热流向量 Q 与等值线 $v(x,y)=C_2$ 的法线相重合。通常称此等值线为等势线，函数 $v(x,y)$ 称为势函数。显然，流线与等势线是正交的。根据 (9.7) 式及 (9.8) 式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{K}Q_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{K}Q_x=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

这说明函数 u,v 满足 C–R 条件，并且 u,v 是可微的，从而函数

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$$

是一个解析函数，称 $f(z)$ 为热流向量场的复势。

由于

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{K}\,Q_y-\mathrm{i}\frac{1}{K}\,Q_x=-\frac{1}{K}\mathrm{i}\,(Q_x-\mathrm{i}\,Q_y)=-\frac{1}{K}\mathrm{i}\,\bar{Q},$$

故 $Q=-K\,\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}$, 从而有 $|Q|=|Kf'(z)|$。

习 题 九

1. 已知某流动的复势为 $f(z)=(z+i)^2$, 求流动的速度，以及流线和势线。
2. 设流体的水平及垂直分速分别为 y 和 x, 求复势并讨论流动。
3. 已知势函数 $\phi(x,y)=x+y$, 求复势并讨论流动。
4. 若复势为 $w=\mathrm{Ln}(z^2+4)+3\,\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,z$, 求沿闭路 $|z|=3$ 的环量 τ 及通过该闭路的流量 N。

第十章 积分变换的一些应用

在这一章中，我们主要想介绍拉普拉斯变换及傅立叶变换在解常微分方程、积分方程及数理方程中的一些应用，同时我们也将傅立叶变换在信息及通讯领域中的应用作一简单的介绍。

§10.1 拉普拉斯变换的应用

拉普拉斯变换重要应用之一是求解线性常微分方程、偏微分方程 (将在 §10.3 中讨论) 及某些积分方程的特解。其求解方法大致包括以下三个基本步骤：

(1) 对于变量函数的方程进行拉普拉斯变换 (连同初始条件或边界条件) 得到一个像函数方程；

(2) 解像函数方程，得到变量的像函数；

(3) 对像函数求逆变换，求得方程的解。

一、解常系数线性微分方程

例 10.1 求

$$y'+y=u(t-b),\quad (b>0)$$

满足初始条件 $y(0)=y_0$ 的特解。

解: 令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$。则 $\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y_0$,

$$sY(s)-y_0+Y(s)=\mathcal{L}[u(t-b)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-bs}。$$

于是,

$$Y(s)=\frac{y_0}{s+1}+\frac{1}{s(s+1)}\mathrm{e}^{-bs}=\mathrm{e}^{-bs}\frac{1}{s}-\mathrm{e}^{-bs}\frac{1}{s+1}+\frac{y_0}{s+1}。$$

由于 $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}]=\dfrac{1}{s+1}$, $\mathcal{L}[u(t-b)]=\mathrm{e}^{-bs}\dfrac{1}{s}$,

$$\mathcal{L}[u(t-b)\mathrm{e}^{-(t-b)}]=\mathrm{e}^{-bs}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}]=\mathrm{e}^{-bs}\frac{1}{s+1},$$

故

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=u(t-b)-u(t-b)\mathrm{e}^{-(t-b)}+y_0\mathrm{e}^{-t}$$

$$=\begin{cases} y_0\mathrm{e}^{-t} & 0<t\le b \\ 1+(y_0-\mathrm{e}^{b})\mathrm{e}^{-t} & t>b \end{cases}。$$

例 10.2 求满足微分方程

$$y''(t)+y(t)=\sin t$$

并满足初始条件 $y(0)=0,\ y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解。

解: 令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$。由于

$$\mathcal{L}[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)+\frac{1}{2},$$

故对原方程两边同取拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)+\frac{1}{2}+Y(s)=\frac{1}{1+s^2},$$

即

$$Y(s)=\frac{1}{(1+s^2)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+s^2}。$$

由于 $s=\pm\mathrm{i}$ 是 $\dfrac{1}{(1+s^2)^2}$ 仅有的两个奇点而且是二级极点，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)^2}\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{st}\frac{1}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s$$

$$=\mathrm{Res}\left[\mathrm{e}^{st}\frac{1}{(1+s^2)^2},\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\mathrm{e}^{st}\frac{1}{(1+s^2)^2},-\mathrm{i}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t),$$

从而，

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)-\frac{1}{2}\sin t=-\frac{1}{2}t\cos t。$$

二、解积分方程

例 10.3 求满足方程

$$y'-4y+4\int_0^t y\,\mathrm{d}t=t$$

且满足 $y(0)=0$ 的特解。

解: 令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$。则

$$\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s),\ \mathcal{L}\left[\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}Y(s)。$$

于是，我们得到

$$sY(s)-4Y(s)+\frac{4}{s}Y(s)=\frac{1}{s^2},$$

即

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-2)^2}=\frac{1}{4s}-\frac{1}{4(s-2)}+\frac{1}{(s-2)^2}。$$

因此，

$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]\\=&\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^{2t}。\end{aligned}$$

例 10.4 *解积分方程*

$$y(t)=\sin t-2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau。$$

解: 解此方程要用到拉普拉斯变换的卷积性质。令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$。则

$$\begin{aligned}Y(s)=&\mathcal{L}[\sin t]-2\mathcal{L}[y(t)]\mathcal{L}[\cos t]\\=&\frac{1}{1+s^2}-\frac{2s}{1+s^2}Y(s)。\end{aligned}$$

故 $Y(s)=\dfrac{1}{(1+s)^2}$，于是 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=t\mathrm{e}^{-t}$。

从以上三个例子可以看出，用拉普拉斯变换法解微分方程或积分方程具有以下几个优点：

(1) 求解过程规范，便于在工程技术中使用；

(2) 当初始条件全部为零时 (这在工程中是常常会遇到的)，用拉普拉斯变换来解方程就会显得特别简单，而用经典的方法求解却不会因此而变得简单；

(3) 当方程中的非齐次项 (在工程中称为输入函数) 具有跳跃点而不可微时，用经典的方法求解是很困难的，而用拉普拉斯变换求解却不会因此带来任何的困难；

(4) 在实际计算中可以用拉普拉斯变换表来求一些函数的像原函数，这就使得求解方程变得更加方便。

§10.2 傅立叶变换在通讯领域中的应用

在信号处理中，我们采用数字滤波器，傅立叶变换等工具将信号转化为数字，然后用计算机对它们进行分析。

信号有连续时间信号和离散时间信号之分，相对应的傅立叶变换就有连续的傅立叶变换 (在第六章中已介绍过) 和离散的傅立叶变换。限于篇幅，我们无法引进离散傅立叶变换这个概念。下面，我们将按通信领域中的术语重新给出与傅立叶变换相关的一些名称。

信号 $x(t)$ 的傅立叶变换

$$\mathcal{F}[x(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t, \quad -\infty < \omega < +\infty$$

称为信号 $x(t)$ 的频谱。频谱 $F(\omega)$ 可以表示为

$$F(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(\omega)},$$

其中 $A(\omega) = |F(\omega)|$ 称为信号 $x(t)$ 的振幅谱，$\theta(\omega)$ 称为信号 $x(t)$ 的相位谱而 $S(\omega) = |F(\omega)|^2$ 则称为能量谱密度。

由于当 $x(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续时，有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega,$$

故信号 $x(t)$ 与它的频谱 $F(\omega)$ 有一一对应的关系，也就是说，$F(\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅立叶逆变换。

设 $f_1(t), f_2(t)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的两个不同的函数且对任意 $t \in (-\infty,+\infty)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\tau)||f_2(\tau+t)|\,\mathrm{d}\,\tau < +\infty,$$

则函数

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(\tau+t)\,\mathrm{d}\,\tau$$

称为函数 $f_1(t), f_2(t)$ 的互相关函数。

当 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ 时，

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(\tau+t)\,\mathrm{d}\,\tau$$

称为 $f(t)$ 的自相关函数。

根据互 (自) 相关函数的定义及傅立叶变换的卷积性质，我们有下面的一些性质：

(1) $R(t) = R(-t)$;

(2) 若 $R_{12}(t)$ 或 $R_{21}(t)$ 中有一个为偶函数，则另一个也为偶函数，而且 $R_{12}(t) = R_{21}(t)$;

(3) $\mathcal{F}[R_{12}(t)] = \overline{\mathcal{F}[f_1(t)]} \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]$。

例 10.5 求 $f(t) = u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ $(\alpha > 0)$ 的振幅谱，相位谱及自相关函数。

解: 由于

$$F(\omega) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\alpha + \mathrm{i}\,\omega}, \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

所以，

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}, \quad \theta(\omega) = \mathrm{Arg}\,(\alpha - \mathrm{i}\,\omega)。$$

由自相关函数的定义，

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(\tau+t)\,\mathrm{d}\,\tau = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}u(t+\tau)\mathrm{e}^{-\alpha(t+\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau。$$

当 $t \geq 0$ 时，$u(t+\tau)=1,\ \forall \tau\in(0,+\infty)$，故

$$R(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{-\alpha(t+\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t};$$

当 $t<0$ 时，$u(t+\tau)=0,\ \forall\tau\in(0,-t)$，于是

$$R(t)=\int_{-t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{-\alpha(t+\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t},$$

从而，$R(t)=\dfrac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|t|},\ \forall t\in(-\infty,+\infty)$。

例 10.6 如图 *10-1* 是一个采样器。设采样角频率为 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，采样宽度为 τ。设输入信号为 $x(t)$，则通过采样器后的输出信号为 $y(t)=\delta_T(t)x(t)$。由图 *10-1 (b)* 可知，

$$\delta_T(t)=\begin{cases}1 & kT\leq t\leq kT+\tau\\ 0 & 其他\end{cases}。$$

设 $\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0 t}$，其中

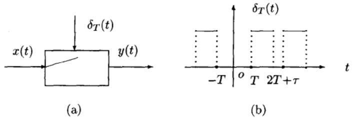


图 10–1

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0\tau}}{\mathrm{i}\,n\omega_0 T}。$$

于是，采样器的输出信号为

$$y(t)=x(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0\tau}}{\mathrm{i}\,n\omega_0 T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0 t},$$

$y(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned}Y(\omega)=\mathcal{F}[y(t)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0\tau}}{\mathrm{i}\,n\omega_0 T}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0\tau}}{\mathrm{i}\,n\omega_0 T}\mathcal{F}[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega_0 t}]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0\tau}}{\mathrm{i}\,n\omega_0 T}X(\omega-n\omega_0),\end{aligned}$$

这里，$X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)],\ X(\omega-n\omega_0)=\mathcal{F}\big[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\omega_0 t}\big]$。

§10.3 积分变换与数理方程

一、简介

数理方程，实际上就是把一些特定的物理现象归纳成微分方程，这些微分方程通常含有几个自变量，而方程中的元素是多元函数及它们的偏导数的组合，所以这种微分方程通常称为偏微分方程。比如常见的数理方程有：

(1) 一维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ($a$ 是常数) 。它的模型是这样的：将一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响。设弦一端固定在原点，另一端固定在 $x=l$ 处。然后给弦一个微小的横向振动，而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动。这时， $u=u(x,t)$ 表示在 t 时刻，在弦上一点 x 处振动的位置。它们的关系由上述的偏微分方程确定。

(2) 拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。它表明了无源静电场中在某点 (x,y) 处电位应满足的条件。此式表明， $u(x,y)$ 是一个调和函数。

(3) 热传导方程。

一块有温度的物体，如果体内每点温度不相同，则在温度较高的点处的热量就要向温度较底的点处流动，这种现象就是热传导。许多热传导的问题都可归结为求物体内温度的分布。通过物理实验及应用热力学中的有关原理，我们可以导出细杆、薄板的内部温度分布函数 $u=u(x,t)$ (或 $u=u(x,y,t)$) 所应该满足的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(一维热传导方程)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(二维热传导方程)} 。$$

在这一节中，我们将举例说明以上三类方程是怎样来求解的。

二、数理方程的初始条件与边界条件

在一、简介中所列的方程所描述的物理现象，总是与某时刻的状态并和此时刻以前的状态有关，从而就与初始状态有关。因此，除了建立方程以外，还需列出它应满足的具体条件，这些条件应该能够说明某一具体的物理现象的初始状态以及在边界上的约束情况。用以说明边界上的约束情况的条件，就称为边界条件。对于弦振动问题来说，初始条件是弦在开始时刻的位移及速度。以 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 分别表示初位移和初速度，则初始条件可表示为

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\phi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)。\end{cases}$$

拉普拉斯方程是描述稳恒状态的物理现象的偏微分方程，与初始状态无关。

对热传导方程来说，初始条件是指在开始时刻物体温度的分布情况。若以 $\phi(x)$ 表示细棒在 $t=0$ 时 x 点处的温度，则热传导方程的初始条件是 $u|_{t=0}=\phi(x)$。

我们再来看边界条件。对于上述的三类方程而言，最简单的边界条件就是给出 $u(x,y)$ 在物体边界上的值。例如，对于振动问题来说，边界条件

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0$$

可表示为长度为 l 的弦在作振动时，两端固定不动。对于其它类型的数理方程，根据实际情况也可以提出具体的边界条件，在这里就不一一赘述。

三、例题

例 10.7 *考虑半无界弦的运动，作用在它上面的外力为 $f(t)=\cos\omega t$ (ω 为常数)，一端保持静止而另一端允许沿垂直方向自由运动。如果弦开始时静止，弦的运动可归结为下列定解问题：*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega t, & 0<x<+\infty, t>0\\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & \\ u|_{x=0}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & \end{cases}$$

求 $u(x,t)$。

解： 根据此偏微分方程列出的初始条件和边界条件来看，把 $u(x,t)$ 看作 t 的函数作拉普拉斯变换较为合适。

令 $U(x,s)=\mathcal{L}[u(x,t)]$。则

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=s^2U(x,s)-su(x,0)-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=s^2U(x,s),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}。$$

于是，对此方程两边同时作拉普拉斯变换得：

$$\begin{cases}s^2U(x,s)=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\\ U|_{x=0}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\partial U}{\partial x}=0。\end{cases}\tag{10.1}$$

(10.1) 式是一个关于 x 的两阶线性微分方程，它的解为

$$U(x,s)=A(\omega)\mathrm{e}^{\frac{sx}{a}}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{sx}{a}}+\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}。$$

于是，由 (10.1) 式得到：

$$A=0,\quad B=-\frac{1}{s(s^2+\omega^2)},$$

所以，

$$U(x,s)=-\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{st}{a}}\right)。$$

注意到，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right]&=\frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]\\&=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2},\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}U(x,t)&=\mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\mathrm{e}^{-\frac{sx}{a}}\right]\\&=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}-u(t-\frac{x}{a})\frac{2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}(t-\frac{x}{a})\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\omega^2}[\sin^2\dfrac{\omega t}{2}-sin^2\dfrac{\omega}{2}(t-\dfrac{x}{a})], & t\geq\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{2}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}, & t\leq\dfrac{x}{a}。\end{cases}$$

例 10.8（中子的减速问题）在无限介质中放置有中子源，以 $u(x,\tau)$ 表示每单位体积在达到年代 τ 时，每单位时间内所含中子的数目，于是 $u(x,\tau)$ 由下面的方程确定：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\delta(x)\delta(\tau)\\ u(x,0)=\delta(x)\\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}u(x,\tau)=0,\end{cases}\tag{10.2}$$

其中 $\delta(x)\delta(\tau)$ 表示源函数。求 $u(x,\tau)$。

解： 令 $U(\omega,\tau)=\mathcal{F}[u(x,\tau)]$。由于

$$\mathcal{F}[\delta(x)]=1,\ \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right]=(\mathrm{i}\,\omega)^2U(\omega,\tau)=-\omega^2U(\omega,\tau),$$

所以，对 (10.2) 式两边同时取傅立叶变换可得：

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+s^2U=\delta(\tau)。\tag{10.3}$$

(10.3) 式是一个含有 s 的偏微分方程。若 s 固定并利用初始条件 $U(\omega,0)=\mathcal{F}[\delta(x)]=1$，我们可以得到 (10.3) 的解为

$$U(\omega,\tau)=\mathrm{e}^{-\omega^2\tau}\left(1+\int_0^\tau\mathrm{e}^{\omega^2t}\delta(t)\,\mathrm{d}\,t\right)。\tag{10.4}$$

由于

$$\int_0^\tau\mathrm{e}^{\omega^2t}\delta(t)\,\mathrm{d}\,t=\lim_{\epsilon\to0+}\int_0^\tau\mathrm{e}^{\omega^2t}\delta_\epsilon(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

其中

$$\delta_\epsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\epsilon} & 0<t<\epsilon\\ 0 & t<0,\ t>\epsilon,\end{cases}$$

而当 $\tau>0$ 时，可取 ϵ 任意小，使得 $\epsilon<\tau$, 所以

$$\int_0^\tau e^{\omega^2 t}\delta(t)\,dt=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^\epsilon e^{\omega^2 t}\frac{1}{\epsilon}\,dt=1。$$

于是 (10.4) 式可以表示为

$$U(\omega,\tau)=\begin{cases}2e^{-\omega^2\tau} & \tau>0\\ 1 & \tau=0。\end{cases}$$

查傅立叶积分表求出 $U(\omega,\tau)$ 关于 ω 的逆变换 $u(x,\tau)$ 为

$$\begin{aligned}u(x,\tau)=&\mathcal{F}^{-1}[U(\omega,\tau)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega,\tau)e^{i\omega x}\,d\omega\\=&\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}},\quad \tau>0。\end{aligned}$$

习 题 十

1. 解下列常微分方程:

   (1) $y''-2y'-3y=2t+1,\ y(0)=\dfrac{1}{3},\ y'(0)=-\dfrac{4}{9}$;

   (2) $y'''-y=e^{-t},\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0$。

2. 求下列积分方程的解:

   (1) $4y'+4y+\displaystyle\int_0^t y\,dt=1-e^{-\frac{t}{2}},\ y(0)=0$;

   (2) $f(t)=2t-\displaystyle\int_0^t f(x)\sin(x-t)\,dx$。

3. 已知某信号的相关函数为 $R(\tau)=\dfrac{1}{4}e^{-2a|\tau|}\,(a>0)$, 求该信号的能量谱密度 $S(\omega)$。

4. 设

$$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}t & 0\le t\le a\\ 0 & t<0,\ t>a\end{cases},\quad f_2(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le a\\ 0 & t<0,\ t>a\end{cases},$$

   其中，$a>0,\ b>0$. 求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数 $R_{12}(\tau)$。

5. 用拉普拉斯变换解下列偏微分方程的边值问题:

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<+\infty,\ t>0\\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=1 & \\ u|_{x=0}=0,\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0 & \end{cases};$$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu,\ (h > 0) & x > 0,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = f_0,\ u|_{x=0} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$ 。

6. 用傅立叶变换解下列偏微分方程：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = f(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$ ；

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & -\infty < x < +\infty,\ 0 \le y \le a \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,a) = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,y) = \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$ ；

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \mathrm{e}^{-x^2},\ u(x,t)\ \text{有界} \end{cases}$ 。

7. 如图 10–2 所示，假定系统最初是静止 $t = 0$ 时刻，因一单位冲击力的作用开始运动，试求由此而产生的振动。

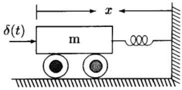


图 10–2

附　录

附 录 一

在这个附录中，我们将《数学分析》中的一些常用的概念和定理列了出来，其主要目的是为了尽可能地减少读者在阅读时的障碍。

一、一致连续性

定义 0.1 设函数 $f(x)$ (或 $f(x,y)$) 在区间 X (或区域 D) 内满足：对任意的 $\epsilon > 0$，都存在有 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$，使得对 X (或 D) 内任意两点 x_1, x_2 (或 $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$)，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ (或 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta$) 时，总有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \quad (\text{或 } |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \epsilon)$$

则称 $f(x)$ (或 $f(x,y)$) 在 X (或 D) 内一致连续。

定理 0.1 设函数 $f(x)$ (或 $f(x,y)$) 在闭区间 $[a,b]$ (或有界闭区域 D) 上连续，则 $f(x)$ (或 $f(x,y)$) 在 $[a,b]$ (或 D) 上一致连续并且在 $[a,b]$ (或 D) 上取得最大值与最小值。

二、级数的一致收敛性

定义 0.2 对于函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ $(a < x < b)$，如果 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$，$(a < x < b)$ 存在且对于任何 $\epsilon > 0$，可以确定 $N = N(\epsilon)$，使得当 $n > N$ 和 $a < x < b$ 时，成立

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称这函数序列在区间 (a,b) 内为一致收敛。

定义 0.3 若函数项级

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{0.1}$$

的部分和序列

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x), \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

在区间 (a,b) 内一致收敛，则称 (0.1) 在此区间内为一致收敛.

定理 0.2 (柯西判别法) 级数 (0.1) 在区间 (a,b) 内一致收敛的充分必要条件是：对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p} - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \epsilon \qquad (a < x < b)$$

成立。

定理 0.3 (魏尔斯特拉斯判别法) 对于级数 (0.1), 若有收敛的正项数项级数

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

使得对于 $a < x < b$ 有 $|u_n(x)| \le c_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 (0.1) 在区间 (a,b) 内绝对并一致收敛。

定理 0.4 (阿贝尔判别法) 如果

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛；

(2) 函数列 $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是有界的，并对每个 x 形成一单调的序列，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛。

定理 0.5 (狄利克雷判别法) 如果

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和都是有界的；

(2) 函数列 $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 对每个 x 形成一个单调的序列，并且当 $n \to \infty$ 时在 (a,b) 内一致地趋于零，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛。

性质 0.1 如果函数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 在区间 (a,b) 内有定义并且连续，而级数 (0.1) 在 (a,b) 内一致收敛于和函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续。

性质 0.2 设函数项级数 (0.1) 在区间 (a,b) 内一致收敛且极限 $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = A_n$, 对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 存在，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，并且 $\lim\limits_{x\to a} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim\limits_{x\to a} u_n(x) \right\}$。

性质 0.3 若收敛级数 (0.1) 的各项在区间 (a,b) 内皆可微并且导函数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，则 $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 。

性质 0.4 若级数 (0.1) 的各项连续，并且此级数在区间 (a,b) 内一致收敛，则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} \mathrm{d}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, \mathrm{d}\, x。$$

三、广义积分的收敛

定义 0.4 如果积分 $\int_a^t f(x) \, \mathrm{d}\, x$ 对于每个 $t \ge a$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分

可定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{0.2}$$

当右端极限存在时，称此广义积分为收敛的，否则称为是发散的。

定义 0.5 若 $|f(x)|$ 广义可积分，则函数 $f(x)$ 的对应积分 (0.2) 称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的广义积分。

定理 0.6 (柯西判别法) 广义积分 (0.2) 收敛的充要条件为对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $b = b(\epsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时，成立不等式 $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| < \epsilon$ 。

定理 0.7 (比较判别法 I) 设对任意 $x \in [a, +\infty)$, 有 $|f(x)| \le c\phi(x)$, 其中 c 是正的常数。

(1) 若 $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 绝对收敛;

(2) 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$ 发散，则积分 $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}\,x$ 也发散。

定理 0.8 (比较判别法 II) 设对任意 $x \in [a, +\infty)$, 函数 $f(x) \ge 0$, $a > 0$, 且有极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\lambda f(x) = d$, $(0 \le d \le +\infty)$ 。

(1) 若 $\lambda > 1$, $0 \le d < +\infty$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛;

(2) 若 $\lambda \le 1$, $0 < d \le +\infty$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 发散。

四、带参数积分的求导

定理 0.9 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D： $a \le x \le b$, $\alpha \le y \le \beta$ 上有定义，并且偏导数 $f'_x(x,y)$ 在区域 D 内连续，则当 $\alpha < y < \beta$ 时， $I(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 可微，且

$$I'(x) = \int_\alpha^\beta f'_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y。$$

定理 0.10 若函数 $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$ 在区域 D： $a \le x \le b$, $\alpha \le y \le \beta$ 上有定义， $\phi(x)$, $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，并当 $x \in [a,b]$ 时，有 $\alpha \le \phi(x) \le \beta$, $\alpha \le \psi(x) \le \beta$, 则 $J(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 可微，且

$$J'(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y + f(x,\psi(x))\,\psi'(x) - f(x,\phi(x))\,\phi'(x)。$$

五、有限覆盖与闭区域套

定义 0.6 设 E 是由直线上的一些开区间（或平面上的开圆盘）构成的集合。若对属于直线（或平面）上的子集 F 中的任一点 ξ, 可在 E 中至少找到一个开区间（或开圆盘） Δ, 使 $\xi \in \Delta$, 则称 E 是 F 的一个开覆盖。

定理 0.11 设 E 是闭区间 $[a,b]$ (或平面上的有界闭子集 F) 的一个开覆盖，则总可从 E 中选出有限个开区间 (或开圆盘), 使它们的并集包含 $[a,b]$ (或 F) 。

定义 0.7 设 $\{F_n\}_0^\infty$ 是直线上 (或平面内) 的闭区间 (或闭区域) 序列。若 $F_n \supset F_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$, 则称 $\{F_n\}_0^\infty$ 是一个闭区间 (或闭区域) 套。

定理 0.12 设 $\{F_n\}_0^\infty$ 是一个闭区间 (或闭区域) 套。若 $\max\limits_{z_1,\,z_2\in F_n}|z_1-z_2|\to 0\ (n\to\infty)$, 则必有且仅有唯一的一点 z 属于所有的 F_n 。

六、格林公式

定理 0.13 (格林公式) 若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在光滑或逐段光滑闭曲线 C 围成的闭区域 G 上连续，则

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\oint_C P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y。$$

附录二 拉普拉斯变换简表

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
一般函数 $f(t)$	$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^m \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
$t^m e^{at} \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1-\cos at}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$

续表

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
一般函数 $f(t)$	$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan\dfrac{a}{s}$
$\left(t-\dfrac{a}{2}t^2\right)\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{2\sqrt{\pi t^3}}$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$
$\dfrac{\sin(2a\sqrt{t})}{\pi t}$	$\mathrm{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-2a\sqrt{t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{s}}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	s

注： $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\ s>0$ 称为伽马函数；

$\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$ 称为误差函数；

$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$ 称为余误差函数。

附录三　傅利叶变换简表

像原函数 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$	像函数 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$
·般函数 $f(t)$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$
矩阵单位脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$F(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$
指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}\quad(\beta>0)$	$F(\omega)=\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}$
三角脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}\frac{2A}{\tau}(\frac{\tau}{2}+t), & -\frac{\tau}{2}\le t<0\\ \frac{2A}{\tau}(\frac{\tau}{2}-t), & 0\le t\le\frac{\tau}{2}\\ 0, & \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$F(\omega)=\frac{4A}{\tau\omega^2}(1-\cos\frac{\omega\tau}{2})$
钟形脉冲 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}\quad(\beta>0)$	$F(\omega)=A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$
Fourier 核 $f(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\quad(\omega_0>0)$	$F(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_0\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$
Gauss 分布函数 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$F(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

像原函数 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$	像函数 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$
一般函数 $f(t)$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$
$f(t)=\mathrm{e}^{a\|t\|}\quad(\mathrm{Re}(a)<0)$	$F(\omega)=\dfrac{-2a}{\omega^2+a^2}$
$f(t)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,at}$	$F(\omega)=\dfrac{\pi}{a}\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi\omega}{2a}\right)^{-1}$
$f(t)=\sin at^2\quad(a>0)$	$F(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$f(t)=\cos at^2\quad(a>0)$	$F(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\|t\|}}$	$F(\omega)=\sqrt{\dfrac{2\pi}{\|\omega\|}}$
$f(t)=\|t\|^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,\pm 1,\cdots)$	$F(\omega)=-2\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha+1)\|\omega\|^{-1-\alpha}$
$f(t)=\mathrm{e}^{-at^2}\quad(\mathrm{Re}\,a>0)$	$F(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$f(t)=\|t\|^{2k+1}\quad(k=0,1,\cdots)$	$F(\omega)=2(-1)^{k+1}(2k+1)!\omega^{-2k-2}$
$f(t)=\delta(t)$	$F(\omega)=1$

参 考 文 献

[1] J.B. Conway. 单复变函数. 吕以辇，张南岳译. 上海：上海科技出版社，1985

[2] 格 · 列 · 伦兹，列 · 埃 · 艾尔斯哥尔兹. 复变函数与运算微积分初步. 北京：人民教育出版社，1960

[3] 江泽坚，孙善利. 泛函分析. 北京：高等教育出版社，1993

[4] 闻国椿. 共形映射与边值问题. 北京：高等教育出版社，1985

[5] 钟玉泉. 复变函数论. 北京：人民教育出版社，1979

[6] 祝同江. 工程数学 — 积分变换. 北京：高等教育出版社，1993

[7] 西安交通大学高等数学教研室. 工程数学 — 复变函数 (第四版). 北京：高等教育出版社，1996

[8] 华东师范大学数学系. 数学分析. 北京：高等教育出版社，1986